Devoir à la maison

Quelques commentaires

J'utilise le féminin ci-dessous, mais c'est un féminin qui s'applique à tous ; par exemple le terme "étudiante" désigne également un "étudiant".

Exercice 1. Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Montrer que si G est un sous-espace vectoriel de E, alors
$$f(G) = \{y \in F \; / \; \exists x \in E, y = f(x)\}$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de F alors
$$f^{-1}(H) = \{x \in E \; / \; f(x) \in H\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.

Barème : 2+2.
Plusieurs étudiantes se sont contentées de justifier que $f(G) \subset F$ et $f^{-1}(H) \subset E$, alors que ces inclusions sont vérifiées par définition de $f(G)$ et $f^{-1}(H)$.
Certaines ont évoqué une fonction f^{-1} dans la deuxième question ; rien ne dit qu'une telle fonction existe.
Certaines n'ont pas utilisé que les ensembles F et H étaient des sous-espace vectoriels ; il le fallait (le résultat est faux en général si F et H ne sont pas des sous-espace vectoriels).
Une formulation très maladroite. Commencer à répondre en écrivant : "Si $f(G)$ est une sous-espace vectoriel alors $u, v \in f(G) \Rightarrow u + v \in f(G)$ etc..." ; on utilise la définition, qui est l'implication réciproque à celle-là.

1. L'ensemble $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F car :
   (a) c'est un sous-ensemble de F par définition,
   (b) il n'est pas vide car $0_F = f(0_E) \in f(G)$,
   (c) si y et y' appartiennent à $f(G)$ et λ à $\mathbb{R}$ alors, par définition il existe x et x' appartenant à G tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$; on a alors
   $$y + \lambda y' = f(x) + \lambda f(x') = f(x + \lambda x')$$
   car f est linéaire ; or G est un sous-espace vectoriel de E donc $x + \lambda x'$ appartient à G ; finalement $y + \lambda y'$ est l'image par f d'un élément de G et appartient donc à $f(G)$.
2. L'ensemble $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E car :
   (a) c'est un sous-ensemble de E par définition,
   (b) il n'est pas vide car $f(0_E) = 0_F \in H$ (puisque H est un sous-espace vectoriel de F, il contient 0_F),
   (c) si x et x' appartiennent à $f^{-1}(H)$ et λ à $\mathbb{R}$ alors, par définition $f(x)$ et $f(x')$ appartiennent à H ; on a alors
   $$f(x + \lambda x') = f(x) + \lambda f(x')$$
   car f est linéaire ; or H est un sous-espace vectoriel de F donc $f(x) + \lambda f(x')$ appartient à H ; $f(x + \lambda x')$ appartient donc à H, autrement dit $x + \lambda x'$ appartient à $f^{-1}(H)$.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^4$, soient $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, -1)$, et $v_4 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

1. Vérifier $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Vérifier que les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 appartiennent au sous-espace vectoriel F.
3. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?
4. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$? De F ?
5. Cette famille forme-t-elle une base de F ?

Barème : 2+1+2+2+1.
Pour la première question plusieurs étudiantes ont écrit que des vecteurs étaient égaux à la somme de leurs coordonnées. C'est une erreur.
Une notation étrange que je n'ai pas comprise, utilisée par plusieurs d'entre vous : $F(v)$, pour F un espace vectoriel et v un vecteur.
Certaines ont écrit des choses comme : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4/(1, 0, -1, 0), 1+0-1+0 = 0\}$. C'est, je crois, signe qu'elles ne comprennent pas le sens de $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$.
Pour la troisième question. Bien écrire : la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre si **le seul** quadruplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0$ est le quadruplet nul $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0)$. Ou quelque chose d'équivalent. C'est gênant de lire la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0$, même si la suite est correcte. De tels λ_i existent toujours (prendre tous les $\lambda_i = 0$).

1. Je ne l'écris pas.
2. Non plus.
3. Non plus. Voir les remarques ci-dessus au sujets des trois premières questions.
4. Le sous-espace vectoriel F n'est pas égal à $\mathbb{R}^4$ (il ne contient pas $(1, 0, 0, 0)$ par exemple). C'est donc un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^4$. Sa dimension est au plus 3. Or comme chaque v_i appartient à F, $Vect(v_1, v_2, v_3, v_4) \subset F$. On en déduit que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^4$. On montre (par l'algorithme de Gauss-Jordan) que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre ; on a donc $dimVect(v_1, v_2, v_3) = 3$. Comme $Vect(v_1, v_2, v_3) \subset F$ et $dim(F) \leq 3$, on en déduit $Vect(v_1, v_2, v_3) = F$ et aussi $Vect(v_1, v_2, v_3, v_4) = F$ (puisque $Vect(v_1, v_2, v_3) \subset Vect(v_1, v_2, v_3, v_4) \subset F$. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est génératrice dans F.
5. Non, car elle n'est pas libre.

Exercice 3. Soit C une matrice carrée $n \times n$. Montrer que si C est inversible, alors sa transposée ${}^tC$ l'est aussi et que $({}^tC)^{-1} = {}^t(C^{-1})$.

Barème : 2.
Ne pas écrire $\frac{1}{C}$ pour l'inverse d'une matrice C.
Il est désagréable de lire ${}^t(CC^{-1}) = {}^tC.{}^t(C^{-1})$ car on a l'impression que celle qui écrit pense que ${}^t(AB) = {}^tA.{}^tB$.
On a

$$CC^{-1} = C^{-1}C = I.$$

En prenant les transposées on obtient

$${}^t(C^{-1}){}^tC = {}^tC\ {}^t(C^{-1}) = {}^tI.$$

Comme ${}^tI = I$, cela signifie que ${}^tC$ est inversible d'inverse ${}^t(C^{-1})$.

Exercice 4. Soit A une matrice $n \times n$.

1. Expliquer pourquoi dire que A est inversible revient à dire que la famille des vecteurs colonne de A est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Expliquer pourquoi dire que A est inversible revient à dire que la famille des vecteurs ligne de A est une base de $\mathbb{R}^n$.

Barème : 2+2.
Il fallait reprendre une partie des raisonnements faits pour démontrer un théorème du cours. Certaines l'ont très bien compris, d'autres se sont à peu près contentées de répéter l'énoncé. Faire appel au déterminant n'était pas nécessaire ; cela donnait parfois faussement l'idée qu'on expliquait quelque chose.

1. Si A est inversible et $AX = 0$ alors $X = 0$ (car $A^{-1}AX = IX = X$). Or AX est la combinaison linéaire des vecteurs colonnes de A dont les coefficients sont les coordonnées de X. La phrase " si A est inversible et $AX = 0$ alors $X = 0$" signifie donc que la famille des vecteurs colonnes de A est libre dans $\mathbb{R}^n$. Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension n cela revient à dire que c'est une base de $\mathbb{R}^n$. Réciproquement...
2. D'après l'exercice précédent A est inversible si et seulement si ${}^tA$ l'est. On applique la question 1. à ${}^tA$. Les vecteurs ligne de A étant les vecteurs colonnes de ${}^tA$ on obtient le résultat.

Exercice 5. Soit A une matrice carrée $n \times n$. Supposons qu'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$ et une matrice C telle que $CA = I_n$. Montrer que $B = C$.

Barème : 2.
Par associativité (et pas commutativité) du produit matriciel, on a

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$