$\forall u \in \mathbb{R}_+ \qquad |\sin u - u| \leq \frac{u^3}{6}$

$$\int_0^{+\infty} tx\, e^{-tx^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-tx^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} t^3 x^3 e^{-tx^2} dx = \left[-\frac{1}{2} t^2 x^2 e^{-tx^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} t\, tx\, e^{-tx^2} dx$$

$$= \frac{t}{2}$$

$$\left| \int_0^{+\infty} (\sin(tx) - tx)\, e^{-tx^2} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^3 x^3}{6} e^{-tx^2} dx = \frac{t}{12}$$

Les calculs précédents sont valables pour $t > 0$.

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \sin(tx)\, e^{-tx^2} dx \qquad t \geqslant 0$$

$$F(0) = 0$$

$$\left| F(t) - \underbrace{\int_0^{+\infty} tx\, e^{-tx^2} dx}_{= 1/2} \right| \leq \frac{t}{12}.$$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} F(t) = \frac{1}{2} \neq 0 = F(0)$

F n'est pas continue en 0.