Axiomes des nombres réels

Le corps des nombres réels est un ensemble $\mathbb{R}$ pour lequel sont définies :
deux applications $(x, y) \rightarrow x + y$ et $(x, y) \rightarrow xy$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
une relation $x \leq y$ (écrite aussi $y \geq x$) entre les éléments de $\mathbb{R}$, satisfaisant aux quatre groupes d'axiomes suivant :

1. $\mathbb{R}$ **est un corps,** en d'autres termes :
$x + (y + z) = (x + y) + z$, l'addition est associative ;
$x + y = y + x$, l'addition est commutative ;
il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $0 + x = x$;
pour chaque élément $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément $-x \in \mathbb{R}$, tel que $x + (-x) = 0$;
$x(yz) = (xy)z$;
$xy = yx$;
il existe un élément $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $1x = x$;
pour chaque élément $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, il existe un élément $x^{-1} \in \mathbb{R}$, tel que $xx^{-1} = 1$;
$x(y + z) = xy + xz$.

2. $\mathbb{R}$ **est un corps ordonné.** Ceci signifie que les axiomes suivants sont satisfaits :
$x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$;
"$x \leq y$ et $y \leq x$" est équivalent à $x = y$;
pour deux éléments quelconques x, y de $\mathbb{R}$, ou bien $x \leq y$ ou bien $y \leq x$;
$x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$;
$0 \leq x$ et $0 \leq y$ impliquent $0 \leq xy$.

3. $\mathbb{R}$ **est un corps ordonné archimédien,** ce qui signifie qu'il satisfait à l'axiome d'Archimède : pour tout couple (x, y) de nombres réels, tels que $0 < x$, $0 \leq y$, il existe un entier n tel que $y \leq nx$.

Le quatrième axiome peut prendre différentes formes. Par exemple :

4. $\mathbb{R}$ satisfait à l'axiome des intervalles emboîtés : étant donnée une suite $([a_n, b_n])$ d'intervalles fermés tels que $a_n \leq b_n$, $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$ pour tout n, alors l'intersection de cette suite n'est pas vide.

Dans le cours nous adopterons la forme suivante (qui donne une définition de $\mathbb{R}$ équivalente) :

4. Dans $\mathbb{R}$**, toute suite croissante majorée est convergente.**