Barbara Schapira

Contrôle continu numéro 1 - 45 minutes - mercredi 7 octobre 2015

Exercice 1 a) Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Vous justifierez très soigneusement votre réponse

$$\begin{aligned} f_1 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (xy, 2x, y) \in \mathbb{R}^3 \\ f_2 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (3x+y, y+z) \in \mathbb{R}^2 \\ f_3 : (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 &\mapsto (x-t, y-t, t, x+y+z, x+y+z+t) \in \mathbb{R}^5 \end{aligned}$$

b) Pour celles qui sont linéaires, calculer leur noyau $\ker f_i$ et leur image Imf_i. En déduire lesquelles sont injectives, ou surjectives, ou bijectives.

Exercice 2 (Algèbre linéaire et nombres complexes) a) Soit Φ l'application linéaire de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ définie par $\Phi(z_1, z_2) = ((2+i)z_1 - 3iz_2, 3z_1 - (1+i)z_2)$. On admet que (vous savez montrer) que Φ est $\mathbb{C}$-linéaire. Ecrire sa matrice dans $M_2(\mathbb{C})$.
b) On note (Φ_1, Φ_2) les applications coordonnées de Φ, c'est-à-dire $\Phi_1(z_1, z_2) = (2+i)z_1 - 3iz_2$, et $\Phi_2(z_1, z_2) = 3z_1 - (1+i)z_2$. Soit $\widetilde{\Phi}$ l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\widetilde{\Phi}(x_1, y_1, x_2, y_2) =$$
$$(\mathrm{Re}\Phi_1(x_1+iy_1, x_2+iy_2), \mathrm{Im}\Phi_1(x_1+iy_1, x_2+iy_2), \mathrm{Re}\Phi_2(x_1+iy_1, x_2+iy_2), \mathrm{Im}\Phi_2(x_1+iy_1, x_2+iy_2))$$

On admet que (vous savez montrer) que $\tilde{\Phi}$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Donner sa matrice dans $M_4(\mathbb{R})$.

Exercice 3 Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
Montrer que c'est un espace vectoriel.

Exercice 4 (Algèbre linéaire et géométrie) Donner sans justification les matrices des applications linéaires suivantes.

- La réflexion par rapport à la droite d'équation $y = 0$ dans $\mathbb{R}^2$
- la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$
- la rotation de centre 0 et d'angle $\pi/3$ dans $\mathbb{R}^2$
- la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $y = 0$
- la réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $z = 0$

Université Rennes 1 L2 MIASHS - AL2E - 2015/2016 UFR Mathématiques
Barbara Schapira

Contrôle continu numéro 2- 45 minutes - mercredi 4 novembre 2015

Mise en garde : Les exercices sont **indépendants**. Chaque question à 1 point doit prendre au plus 2 minutes et chaque question à 2 points ... au plus 4 minutes.
Le barême est indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (Dessins, 1,5 points)

1. Dessiner deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ qui sont supplémentaires l'un de l'autre.
2. Dessiner deux vecteurs indépendants dans $\mathbb{R}^3$
3. Dessiner trois vecteurs liés dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 2 (Changement de base, 8 points) Soit $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{B}' = ((1,2),(2,-1))$.

1. (1 points) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. (1 point) Ecrire la matrice P de l'application Id de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}')$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$.
3. (1 points) Décomposer les vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
4. (1 point) Ecrire la matrice Q de l'application Id de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}')$.
5. (1 point) Quelle est la relation entre P et Q ?
6. (1 point) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (\frac{14x-2y}{5}, \frac{-2x+11y}{5})$. Donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
7. (2 points) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3 (Dualité, 5,5 points) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. Soit $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ la base usuelle de E. On note $e_1 = 1$, $e_2 = X$, $e_3 = X^2$.

1. (1,5 point) Rappeler la signification de la notation E^*.
2. (1,5 point) Rappeler la définition de e_1^*, e_2^* et e_3^*.
3. (1 point) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(P) = P(0)$. Soit $g : E \to \mathbb{R}$ définie par $g(P) = P'(0)$. Soit $h : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $h(P) = \frac{1}{2}P''(0)$. Si $P(X) = aX^2 + bX + c$, écrire explicitement son image par f, g, h.
4. (1,5 point) Comparer f, g, h, avec e_1^*, e_2^* et e_3^*.

Exercice 4 (Algèbre linéaire et géométrie, 5 points) Donner sans justification les matrices des applications linéaires suivantes.

1. (1pt) la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans $\mathbb{R}^2$
2. (1pt) la rotation de centre 0 et d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$
3. (1pt) la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x = 0$
4. (1pt) la réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $y = 0$
5. (1pt) l'homothétie de $\mathbb{R}^3$ de centre 0 et de rapport -3.

Examen - 2 heures - Jeudi 17 décembre 2015

Mise en garde :

Les exercices sont **indépendants**.
Le barême est indicatif et pourra être modifié.
Les temps indiqués sont indicatifs mais pas obligatoires.
Il est recommandé de **lire** tout le sujet avant de commencer.
La **rédaction** comptera beaucoup dans la notation.
Une **phrase de conclusion** - au minimum - est attendue à chaque exercice.

Exercice 1 (Dessins : 1 point - 5 minutes)

1. Dessiner deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^2$ n'ayant aucun vecteur en commun.
2. Dessiner trois vecteurs indépendants dans $\mathbb{R}^3$.
3. Dessiner deux sous-espaces vectoriels non nuls et supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (Questions de cours : 3 points - 10 minutes)

1. Rappeler la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'une application linéaire.
2. Rappeler la définition d'une application linéaire diagonalisable.
3. Donner un exemple d'application linéaire diagonalisable dans $\mathbb{R}^2$.
4. Donner un exemple d'application linéaire non diagonalisable dans $\mathbb{C}^2$.
5. Rappeler la définition du polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (Géométrie et diagonalisation (1) : 1,5 points - 10 minutes)
On considère la rotation r de centre O et d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Dessiner la base canonique et son image par r.
2. Donner la matrice de r dans la base canonique.
3. Calculer son déterminant (par un argument géométrique ou un calcul matriciel).
4. La rotation r a-t-elle des valeurs propres et des vecteurs propres ? Si oui lesquels ?
5. La rotation r est-elle diagonalisable ?
6. Si oui, donner une base de diagonalisation.
7. Si oui, toujours, donner la matrice de l'application identité de la base de diagonalisation vers la base canonique.

Exercice 4 (Géométrie et diagonalisation (2) : 2 points - 10 minutes)
On considère la rotation ρ d'axe vertical $\mathbb{R}.e_3$ et d'angle π dans $\mathbb{R}^3$.

1. Dessiner la base canonique et son image par ρ.
2. Donner la matrice de ρ dans la base canonique.
3. Calculer son déterminant (par un argument géométrique ou un calcul matriciel).
4. La rotation ρ a-t-elle des valeurs propres et des vecteurs propres ? Si oui lesquels ?
5. La rotation ρ est-elle diagonalisable ?
6. Si oui, donner une base de diagonalisation.
7. Donner la matrice de l'application identité de la base de diagonalisation vers la base canonique.

Exercice 5 (Géométrie et diagonalisation (3) : 2 points - 10 minutes)
On considère la projection P sur le plan d'équation $y = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Dessiner la base canonique et son image par P.
2. Donner la matrice de P dans la base canonique,
3. Calculer son déterminant (par un argument géométrique ou un calcul matriciel).
4. La projection P a-t-elle des valeurs propres et des vecteurs propres ? Si oui lesquels ?
5. La projection P est-elle diagonalisable ?
6. Si oui, donner une base de diagonalisation. Donner la matrice de l'application identité de la base de diagonalisation vers la base canonique.

Exercice 6 (Géométrie et diagonalisation (4) : 2 points - 10 minutes)
On considère la symétrie σ par rapport à l'axe $\mathbb{R}.e_1$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Dessiner la base canonique et son image par σ.
2. Donner la matrice de σ dans la base canonique.
3. Calculer son déterminant (par un argument géométrique ou un calcul matriciel).
4. La symétrie σ a-t-elle des valeurs propres et des vecteurs propres ? Si oui lesquels ?
5. La symétrie σ est-elle diagonalisable ?
6. Si oui, donner une base de diagonalisation. Donner la matrice de l'application identité de la base de diagonalisation vers la base canonique.
7. Comparer avec ρ ?

Exercice 7 (Polynomes et dualité : 3 points - 15 minutes)
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. Donner une base de E. Quelle est sa dimension ?

2. Donner la définition du dual de E.

3. Soit $\varphi_0 : P \to P(0)$, $\varphi_1 : P \to P(1)$ $\varphi_2 : P \to P(2)$ trois applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$. Forment-elles une famille libre de E^* ? génératrice ?

4. Donner une base de E^*.

Exercice 8 (Diagonalisation : 6 points - 35 minutes)
Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tels que dans la base canonique (e_1, e_2, e_3), on ait :

$$Mat_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Mat_{(e_1,e_2,e_3)}(g) = B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Pouvez-vous dire sans calcul si l'une des deux applications est diagonalisable ? Pourquoi ?

2. Calculer leurs polynômes caractéristiques.

3. Pouvez-vous dire sans calcul si l'une d'elle est diagonalisable ? Pourquoi ?

4. Si f est diagonalisable, donner une base de diagonalisation, la matrice A' de f dans cette base, la matrice P de l'identité de la base de diagonalisation vers la base canonique, ainsi que son inverse P^{-1}.

5. Donner l'expression de A^n, pour $n \geq 1$ entier.

6. Si g est diagonalisable, donner une base de diagonalisation **orthonormée**, la matrice B' de g dans cette base, la matrice Q de l'identité de la base de diagonalisation vers la base canonique, ainsi que son inverse Q^{-1}.

7. Donner l'expression de B^n, pour $n \geq 1$ entier.

Contrôle continu - 1h30- mercredi 2 novembre 2016

Exercice 1 (Algèbre linéaire et géométrie) Donner la matrice des applications linéaires suivantes dans la base canonique.

- La réflexion par rapport à la droite d'équation $y = 0$ dans $\mathbb{R}^2$
- la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$
- la rotation de centre 0 et d'angle $\pi/3$ dans $\mathbb{R}^2$
- la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $y = 0$
- la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur la droite d'équations $x = 0$ et $y = 0$
- la réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $z = 0$

Corrigé Il n'y a qu'à regarder les images des vecteurs de la base canonique, et on trouve les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Donner la définition de *F et G sont supplémentaires*.
2. Si $E = \mathbb{R}^3$, donner un exemple de deux sous-espaces vectoriels qui sont supplémentaires l'un de l'autre. Faire un dessin.
3. Si $E = \mathbb{R}^3$, donner un exemple de deux sous-espaces vectoriels qui ne sont pas supplémentaires l'un de l'autre. Faire un dessin.
4. Si $E = \mathbb{R}^3$, donner un exemple d'application linéaire $p : E \to E$ telle que $p \circ p = p$.
5. Soit E un espace vectoriel et $p : E \to E$ une application linéaire telle que $p \circ p = p$. Montrer que $F = Kerp$ et $G = Im(p)$ sont supplémentaires.

Corrigé

F et G sont supplémentaires si $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$.
Par ex le plan horizontal d'équation $z = 0$ et la droite verticale d''equations $x = y = 0$ sont supplémentaires.
Les droites $\mathbb{R}e_1$ et $\mathbb{R}e_2$ ne sont pas supplémentaires l'une de l'autre.
La projection orthogonale p sur le plan d'équation $z = 0$ vérifie $p \circ p$.
On écrit $x \in E$ comme $x = (x - p(x)) + p(x)$. Comme $x - p(x) \in Kerp$ et $p(x) \in Imp$ ceci prouve que $F + G = E$. De plus, si $y \in Kerp \cap Imp$, alprs $y = p(z)$ et $p(y) = 0$ d'où $p \circ p(z) = 0$ mais $p \circ p = p$ donc $p(z) = 0$ donc $y = p(z) = 0$.

Exercice 3 Soit $E = \mathbb{C}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes.

1. Montrer que E est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Le sous-ensemble $F = \mathbb{R}[X]$ est-il un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel ? Pourquoi ?
3. Le sous-ensemble $F = \mathbb{R}[X]$ est-il un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel ? Pourquoi ?

Corrigé Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Il est déjà muni d'une addition comme $\mathbb{C}$-eV. Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on peut restreindre la multiplication de $\mathbb{C} \times E \to E$ qui à $(\lambda \in \mathbb{C}, x \in E)$ associe $\lambda.x$ en une multplication de $\mathbb{R} \times E$ dans E.

$\mathbb{R}[X]$ n'est pas un C-ev. Par exemple, $i.X$ n'est pas un polynome à coefficients réels.

$\mathbb{R}[X]$ est un $\mathbb{R}$-sous eV du $\mathbb{R}$-eV E. En effet, il est non vide, il est stable par addition (la somme de deux polynômes à coefficients réels est un polynôme à coefficients réels) et par multiplication par un nombre réel : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $\lambda P \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 Soit $G = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3.

1. Soit $H = \{P \in G, P(0) + P'(0) + P''(0) + P'''(0) = 0\}$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de G.
2. Montrer que H est inclus strictement dans G.
3. Montrer que les polynômes P_1, P_2, P_2 et P_4 définis par $P_1(X) = 6 - X^3$, $P_2(X) = X^3 - 2X^2 - 2X$, $P_3(X) = X^2 - 3X + 1$, et $P_4(X) = X^3 - X^2 - 4$ sont dans H.
4. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle libre dans G ? Et dans H?
5. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle génératrice dans G? Et dans H ?
6. Trouver une base de H

Corrigé H est non vide car le polynôme nul est dans H. H est stable par addition : si $P \in H$ et $Q \in H$, alors

$$(P+Q)(0)+(P+Q)'(0)+(P+Q)''(0)+(P+Q)'''(0) = P(0)+P'(0)+P''(0)+P'''(0)+Q(0)+Q'(0)+Q''(0)+Q'''(0) = 0$$

H est stable par multiplication par un nombre : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in H$, alors

$$(\lambda P)(0) + (\lambda P)'(0) + (\lambda P)''(0) + (\lambda P)'''(0) = \lambda \left(P(0) + P'(0) + P''(0) + P'''(0)\right) = \lambda.0 = 0$$

H est strictement inclus dans G car le polynôme $P(X) = 1$ n'est pas dans H.

Le fait que P_1, P_2, P_3 et P_4 soient dans H est une simple vérification.

L'ev G est de dimension 4 donc H est de dimension au plus 3. Or la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est dans H donc elle ne peut pas être libre, sinon elle engendrerait un sous eV de dimension 4. Être libre dans G ou dans H c'est la même chose. Donc elle ne peut pas être libre ni dans G ni dans H.

La famille $P_1, \dots P_4$ est incluse dans H, elle ne peut donc pas être génératrice de tout G, puisque H est strictement inclus dans G.

Les polynômes P_1, P_2, P_3 forment une famille libre. En effet, si $\alpha P_1 + \beta P_3 + \gamma P_4 = 0$, alors $\alpha P_1'(0) + \beta P_3'(0) + \gamma P_4'(0) = 0$, ce qui donne $-3\beta = 0$ donc $\beta = 0$ et $\alpha P_1''(0) + \beta P_3''(0) + \gamma P_4''(0) = 0$ ce qui donne de même $\gamma = 0$ et finalement $\alpha = 0$ aussi. Donc $\dim H \geq 3$ donc $\dim H = 3$ donc (P_1, P_3, P_4) est une famille libre de 3 vecteurs de H de dim 3, c'est donc une base de H.

Exercice 5 Calculer les déterminants des matrices suivantes de la manière la plus rapide possible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 9 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ -\sqrt{2} & 3 & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Corrigé On développe $\det A$ suivant la troisième colonne.

$$\det A = (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 9 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \\ 9 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -225 - 130 = -355$$

La matrice B a manifestement ses colonnes liées, donc $\det B = 0$.

Exercice 6 Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (X, Y, Z)$ avec

$$X = x - y + z + t, Y = x + 2z - t, Z = x + y + 3z - 3t.$$

1. Quelle est la matrice A de f dans les bases canoniques (e_1, e_2, e_3, e_4) et (E_1, E_2, E_3).
2. Montrer que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathrm{Im} f$ et que $\mathcal{B} = (f(e_1), f(e_2), E_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
3. Montrer que $\ker f$ est de dimension 2 et donner une base (u_1, u_2) de $\ker f$.
4. Vérifier que $\mathcal{C} = (e_1, e_2, u_1, u_2)$ est une base de $\mathbf{R}^4$.
5. Quelle est la matrice B de f de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$?
6. Quelle est la matrice P de l'identité de $\mathbb{R}^4$ de la base $\mathcal{C}$ vers la base canonique $(e_1, \ldots, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$?
7. Quelle est la matrice Q de l'identité de $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base canonique (E_1, E_2, E_3) de $\mathbb{R}^3$?
8. Quelle relation satisfont les matrices A, B, P, Q ?

Corrigé La matrice A vaut $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

L'image $Im(f)$ est engendrée par les vecteurs colonnes de A. L'algorithme de Gauss Jordan aboutit à $Frel(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc f est de rang 2, et $Im(f)$ est de dimension 2. Les deux premières colonnes de A sont les coordonnées de $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Il est donc clair (règle des zéros par exemple) que ces vecteurs ne sont pas colinéaires. L'algorithme de Gauss Jordan montre que la famille $(f(e_1), f(e_2), E_3)$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ de dim 3.

Le théorème du rang nous dit que $rg(f) + \dim Kerf = 4$. Donc $Ker(f)$ est de dimension 2. La forme de $Frel(A)$ nous donne les relations de liaison suivantes entre les colonnes : $C_3 = 2C_1 + C_2$ et $C_4 = -C_1 - 2C_2$, ce qui nous donne deux vecteurs $u_1 = (2, 1, -1, 0)$ et $u_2 = (1, 2, 0, 1)$ indépendants l'un de l'autre dans $Ker(f)$. L'argument de dimension assure que c'est une base de $Ker(f)$.

L'algorithme de gauss Jordan assure que (e_1, e_2, u_1, u_2) est libre, donc une base de $\mathbb{R}^4$ (car 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ de dim 4)

La matrice B s'obtient immédiatement : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice P vaut $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice Q vaut $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Et on vérifie que $B = Q^{-1}AP$, avec $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Corrigé de l'examen - vendredi 16 décembre 2016

Exercice 1 (Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels, environ 10 minutes, $\simeq 2$ points)

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Donner la définition d'un *sous-espace vectoriel de E.*
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Dessinez l'ensemble $A_1 = \{(x, y) \in E, 2x + 3y = 0\}$. Est-ce un sous-espace vectoriel de E ?
3. Dessinez l'ensemble $A_2 = \{(x, y) \in E, 2x + 3y = 1\}$. Est-ce un sous-espace vectoriel de E ?
4. Dessinez l'ensemble $A_3 = \{(x, y) \in E, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Est-ce un sous-espace vectoriel de E ?
5. Dessinez l'ensemble $A_4 = \{(x, y) \in E, x^2 = y^2\}$. Est-ce un sous-espace vectoriel de E ?

Corrigé Un sev de E est un sous-ensemble de E qui contient 0_E, qui est stable par addition ($\vec{x} \in E$ et $\vec{y} \in E$ impliquent $\vec{x} + \vec{y} \in E$) et stable par multiplication par un scalaire ($\vec{x} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ impliquent $\lambda.\vec{x} \in E$.)

A_1 est une droite passant par l'origine. C'est un sev: $0 \in A_1$, et A_1 est stable par addition et multiplication par un scalaire.

A_2 est une droite affine, ne passant pas par l'origine. $0 \notin A_2$ donc A_2 pas seV.

A_3 est le disque de rayon 1 centré en $(0, 0)$. Ce n'est pas un sev. Par exemple, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont dans A_3 mais leur somme $(1, 1)$ n'est pas dans A_3.

A_4 est l'union des deux droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$. Il contient 0 et est stable par multiplication par un scalaire, mais pas par addition : $(1, 1)$ et $(-1, 1)$ sont dans A_4 mais pas $(0, 2)$.

Exercice 2 (Applications linéaires, environ 10 minutes, $\simeq 3$ points)

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Rappelez la définition de f *est une application linéaire de E dans F.*
2. Même question lorsque E et F sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels ?
3. L'application $f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_1(x, y, z, t) = (y - z, 2xy, t - x)$ est-elle linéaire ?
4. L'application $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ définie par $f_2(x) = (2x, 0, -x, \sqrt{2}x)$ est-elle linéaire ?
5. L'application $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_3(x, y) = (x - y, 2y, x + 1)$ est-elle linéaire ?
6. On identifie un élément $z = x + iy$ de $\mathbb{C}$ au point (x, y) de $\mathbb{R}^2$. Soit $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application $z \to \bar{z}$. Montrer que f_4 n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire, i.e. pas linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
7. Dans l'identification de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$, comment s'écrit l'image d'un point (x, y) par f_4 ? Montrer que f_4 est $\mathbb{R}$-linéaire, i.e. linéaire comme application du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Corrigé f est linéaire si $f(0_E) = 0_F$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in E$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si E et F sont deux $\mathbb{C}$ espaces vectoriels la seule différence est qu'il faut prendre $\lambda \in \mathbb{C}$.
$f_1(2, 2, 0, 0) = (2, 8, -2)$ alors que $f_1(1, 1, 0, 0) = (1, 2, -1)$ donc $f_1(2, 2, 0, 0) \neq 2.f_1(1, 1, 0, 0)$.
f_2 est linéaire, soit d'après le cours, soit en vérifiant à la main.
$f_3(0, 0) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc f_3 n'est pas linéaire.
Si $\lambda = i$ et $z = i$ on voit que $f(\lambda.z) = f(-1) = -1$ tandis que $\lambda f(z) = i.\bar{i} = -i^2 = 1$. Donc f_4 n'est pas linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-ev. En revanche, si on voit un point $z = x + iy$ de $\mathbb{C}$ comme le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, f_4 est l'application qui à (x, y) associe $(x, -y)$. Elle est donc $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (Diagonalisation, environ 5minutes, $\simeq 2$ points)

1. Pouvez-vous donner un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui n'a aucune valeur propre ? Si oui lequel ?
2. Pouvez-vous donner un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui n'a aucune valeur propre ? Si oui lequel ?
3. Pouvez-vous donner un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui a une valeur propre et qui n'est pas diagonalisable ? Si oui lequel ?
4. Pouvez-vous donner un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui a deux valeurs propres distinctes et qui n'est pas diagonalisable ? Si oui lequel ?
5. Pouvez-vous donner un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a une valeur propre et qui n'est pas diagonalisable ? Si oui lequel ?
6. Pouvez-vous donner un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a deux valeurs propres distinctes et qui n'est pas diagonalisable ? Si oui lequel ?

Corrigé La rotation d'angle $\pi/2$ n'a aucune valeur propre, et aucune direction propre, car elle fait tourner toutes les droites. N'importe quelle rotation d'angle différent de 0 ou π modulo 2π n'a aucune valeur propre non plus pour la même raison.

Dans $\mathbb{R}^3$, toutes les applications linéaires ont au moins une valeur propre. En effet , leur polynôme caractéristique est de degré trois, il a donc au moins une racine, qui est une valeur propre.

Dans $\mathbb{R}^2$, l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a une valeur propre, son polynôme caractéristique est $(X - 2)^2$ mais elle n'est pas diagonalisable, sinon ce serait $2.Id$.

Une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui a 2 valeurs propres distinctes est diagonalisable par un théorème du cours (très facile : 2 VP distinctes, donc deux espaces propres supplémentaires, donc on peut trouver deux vecteurs propres indépendants, et on est en dimension 2, donc ils forment une base).

Dans $\mathbb{R}^3$ la rotation d'axe $\mathbb{R}.e_3$ et d'angle $\pi/2$ a une valeur propre, 1, avec espace propre associÃ© l'axe de la rotation (qui est fixé par la rotation, d'où la valeur propre 1), mais toutes les autres directions tournent par la rotation, donc pas d'autre direction propre. Matriciellement, la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $(X-1)(X^2+1)$ et la seule valeur propre est 1 et l'espace propre associé est de dimension 1. Donc elle n'est pas diagonalisable.

Dans $\mathbb{R}^3$ l'application dont la matrice est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $(X_2)^2(X-1)$; elle a 2 valeurs propres, 2 et 1. Mais ses espaces propres sont chacun de dimension 1 donc elle n'est pas diagonalisable.

Exercice 4 (Espaces vectoriels de polynômes, environ 10 minutes, $\simeq$ 3 points) Soit $G = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3.

1. Soit $H = \{P \in G, P(0) + P'(0) + P''(0) + P'''(0) = 0\}$. Pourquoi H est-il un sous-espace vectoriel de G?
2. Montrez que H est inclus strictement dans G.
3. Qu'est-ce que cela signifie sur la dimension de G et de H ?
4. On suppose déjà vérifié que les polynômes P_1, P_2, P_2 et P_4 définis par $P_1(X) = 6 - X^3$, $P_2(X) = X^3 - 2X^2 - 2X$, $P_3(X) = X^2 - 3X + 1$, et $P_4(X) = X^3 - X^2 - 4$ sont dans H.
5. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle libre dans G ?
6. Pouvez-vous en déduire si elle est libre ou pas dans H?
7. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle génératrice dans G?
8. Est-elle génératrice dans H ?

Â **Corrigé** Déjà vu au partiel. H est un sev car défini par une équation linéaire.

H est strictement inclus dans G par exemple car le polynôme $P(X) = X$ n'est pas dans H. Donc $\dim H < \dim G = 4$.

Si la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) était libre dans G ce serait une base de G qui est de dimension 4. Elle serait donc génératrice. Or $Vect(P_1, P_2, P_3, P_4) \subset H$. Donc cette famille n'est pas génératrice de tout G. Donc pas libre dans G.

Etre libre dans G ou dans H c'est pareil, elle n'est donc pas libre dans H.

Cette famille n'est pas génératrice dans G. En revanche, rien ne lui interdit d'être génératrice dans H. Dans H, on vérifie aisément que P_1, P_2, P_3 forment une famille libre, donc $Vect(P_1, P_2, P_3)$ est de dimension 3. Mais

$$Vect(P_1, P_2, P_3) \subset Vect(P_1, P_2, P_3, P_4) \subset H$$

et H est de dimension 3. DOnc $Vect(P_1, P_2, P_3) = Vect(P_1, P_2, P_3, P_4) = H$ et la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est génératrice.

Exercice 5 (Diagonalisation, environ 25 minutes, $\simeq$ 6 points) Soit $E = \mathbb{R}^4$, et $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (-4x - 32y + 4z + 18t, 6y - 3t, -2x - 10y + 2z + 6t, 6y - 3t).$$

1. Donnez la matrice A de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de E.
2. Pouvez-vous dire avant tout calcul si f est diagonalisable ou pas ?
3. Calculez son polynôme caractéristique.
4. Quelles sont les valeurs propres de f ?
5. Pouvez-vous en déduire directement si elle est diagonalisable ou pas ?
6. Calculez les espaces propres de f.
7. Donnez une base (b_1, b_2, b_3, b_4) de E constituée de vecteurs propres de f.
8. Donnez (sans calculs) la matrice D de f dans la base (b_1, b_2, b_3, b_4).
9. Donnez la matrice P de l'application identité de (b_1, b_2, b_3, b_4) vers (e_1, e_2, e_3, e_4).
10. Calculez P^{-1}.
11. Faites un diagramme et donnez la relation entre A, P, D, P^{-1}.
12. Comment fait-on pour calculer A^{17} ? On ne demande pas le résultat du calcul mais la méthode.

On a $A = \begin{pmatrix} -4 & -32 & 4 & 18 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \\ -2 & -10 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ Elle n'est pas symétrique, on ne peut donc rien dire avant calcul. Son polynôme caractéristique se calcule en développant par rapport à la 2me ligne par exemple. On trouve

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X+4 & 32 & -4 & -18 \\ 0 & X-6 & 0 & 3 \\ 2 & 10 & X-2 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & X+3 \end{vmatrix} = \cdots = X^2(X-3)(X+2)$$

Les valeurs propres sont $0, 3, -2$. Elle n'a que 3 valeurs propres dans $\mathbb{R}^4$, on ne peut encore pas en déduire si elle est diagonalisable ou pas. On calcule par Gauss Jordan

$$E_0 = Kerf = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs forment une base deE_0. De même, par Gauss Jordan,

$$E_{-2} = Ker(f + 2Id) = Ker(A + 2I_4) = Vect \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et pour finir $E_3 = Vect \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On prend $b_1 = (1, -1, 2, -2)$, $b_2 = (1, 0, 1, 0)$, $b_3 = (2, 0, 1, 0)$ et $b_4 = (-2, 1, 0, 1)$. La matrice D de f dans la base (b_i) est $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice de passage P de la base (b_i) vers la base (e_i) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule son inverse par Gauss Jordan, et on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le diagramme usuel nous dit que $A = PDP^{-1}$ de sorte que

$$A^{17} = PD^{17}P^{-1} = P. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{17} \end{pmatrix} .P^{-1}.$$

Exercice 6 (Diagonalisation, environ 25 minutes, $\simeq$ 6 points) Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = \frac{1}{6}(-5x + 4y + 13z, 4x + 4y + 4z, 13x + 4y - 5z)$$

1. Donnez la matrice A de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de E.
2. Pouvez-vous dire avant tout calcul si f est diagonalisable ou pas ?
3. Calculez son polynôme caractéristique.
4. Donnez les valeurs propres de f.
5. Calculez les espaces propres de f.
6. Donnez une base (b_1, b_2, b_3) de E qui est *orthonormée* et constituée de vecteurs propres de f.
7. Donnez (sans calculs) la matrice D de f dans la base (b_1, b_2, b_3).
8. Donnez la matrice P de l'application identité de (b_1, b_2, b_3) vers (e_1, e_2, e_3).
9. Donnez P^{-1}.
10. Faites un diagramme et donnez la relation entre A, P, D, P^{-1}.

La matrice A est $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 13 \\ 4 & 4 & 4 \\ 13 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. Elle est symétrique de sorte qu'on sait, d'après le cours, que f est diagonalisable. So,n polynôme caractéristique est

$$\chi_A(X) = \frac{1}{6^3} \begin{vmatrix} X+5 & -4 & -13 \\ -4 & X-4 & -4 \\ -13 & -4 & X+5 \end{vmatrix} = X(X-2)(X+3).$$

On sait alors aussi d'après un autre théorème du cours que comme f a 3 valeurs propres distinctes, 0, 2 et -3, elle est diagonalisable. Mais on le savait déjà. On calcule par Gauss Jordan $E_2 = Ker(A - 2I_3) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De même

$E_0 = KerA = Vect \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_3 = Ker(A + 3I_3) = Vect \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On veut une base orthonormée de vecteurs propres. On pose alors

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Comme d'habitude le diagramme donne $A = PDP^{-1}$.

Université Rennes
Barbara Schapira L2 MIASHS - Algèbre III - 2017/2018

Contrôle continu numéro 1 - deux heures - mardi 7 novembre 2017

Exercice 1 (Environ 5 points) **a)** Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Vous justifierez très soigneusement votre réponse

$$f_1 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xy, 2x, y) \in \mathbb{R}^3$$
$$f_2 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (3x+y, y+z) \in \mathbb{R}^2$$
$$f_3 : (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (x-t, y-t, t, x+y+z, x+y+z+t) \in \mathbb{R}^5$$

b) Pour celles qui sont linéaires, pouvez-vous affirmer sans calcul, en utilisant le cours, si elles peuvent ou pas être injectives ou surjectives?
c) Pour celles qui sont linéaires, calculez leur noyau Ker f_i et leur image Im f_i.
d) Déduisez-en lesquelles sont injectives, ou surjectives, ou bijectives.

Corrigé f_1 n'est pas linéaire car $f_1(2,2,2) = (4,4,2) \neq 2 \times f_1(1,1,1) = 2 \times (1,2,1)$. f_2 est linéaire car $f_2((x,y,z)) + f_2((x',y',z')) = (3x+y, y+z) + (3x'+y', y'+z') = (3(x+x')+(y+y'), (y+y')+(z+z')) = f_2((x,y,z)+(x',y',z'))$. De même $f_2(\lambda(x,y,z)) = (3\lambda x + \lambda y, \lambda y + \lambda z) = \lambda f_2(x,y,z)$ .Donc f_2 est linéaire.

On procède de la même manière pour f_3 qui est linéaire.

b) Sans calcul, on sait que f_2 n'est pas injective car $\dim \mathbb{R}^2 < \dim \mathbb{R}^3$ et f_3 n'est pas surjective car $\dim \mathbb{R}^4 < \dim \mathbb{R}^5$

c) $Ker f_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (3x+y=0 \quad \text{et} \quad y+z=0\}$ Ainsi

$$Ker f_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y=-3x \quad \text{et} \quad z=3x\} = \{(x,-3x,3x) \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-3,3), x \in \mathbb{R}\} = Vect(1,-3,3)$$

Tout élément (u,v) de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire $(u,v) = (3x+y, y+z)$ avec par exemple $y=0$ $z=v$ et $x=u/3$. autrement dit, $(u,v) = f_2(u/3, 0, v)$ donc $Im f_2 = \mathbb{R}^2$ et f_2 est surjective.

$$Ker f_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x-t=0, y-t=0, t=0, x+y+z=0, x+y+z+t=0\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x=y=z=t=0\}$$

DOnc $Ker f_3 = \{(0,0,0,0)\}$ et f_3 est injective. $(a,b,c,d,e) \in Im f_3$ ssi il existe (x,y,z,t) tq $x-t=a$, $y-t=b$, $c=t$, $x+y+z=d$, $x+y+z+t=e$. En particulier, $c=t$, $x=a+c$, $y=b+c$, $x+y+z=d$, $x+y+z=e-c$, d'où $d=e-c$. Si $d=e-c$ alors $(a,b,c,d,e) = f_3(a+c, b+c, d-a-b-2c, c)$. Ainsi, $Ker(f_3) = \{(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5, d=e-c\}$. Un argument de dimension (via le théorème du rang) nous assure que $\dim Ker f_3 + \dim Im f_3 = 4$, soit ici $\dim Ker f_3 = 0$ et $\dim Im f_3 = 4$. Cela correspond bien aux calculs ci dessus.

Exercice 2 (Algèbre linéaire et géométrie, environ 2,5 points) Donnez sans justification les matrices des applications linéaires suivantes.

- La réflexion par rapport à la droite d'équation $y=0$ dans $\mathbb{R}^2$
- la réflexion par rapport à la droite d'équation $y=-x$ dans $\mathbb{R}^2$
- la rotation de centre 0 et d'angle $\pi/3$ dans $\mathbb{R}^2$
- la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $y=0$
- la réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $z=0$

Il suffit de calculer les images des vecteurs de la base canonique. Pour la réflexion par rapport à la droite d'équation $y=0$, $e_1=(1,0)$ est envoyé sur e_1 et $e_2=(0,1)$ est envoyé sur $(0,-1)=-e_2$ .Ainsi la matrice de cette réflexion est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Pour la réflexion par rapport à la droite d'équation $y=-x$, e_1 est envoyé sur $-e_2$ et e_2 sur $-e_1$ d'où la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. La rotation de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et d'angle $\pi/3$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. La projection orthogonale a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour finir la réflexion par rapport au plan d'équation $z=0$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (Environ 1,5 points) Dessinez les ensembles suivants, et précisez lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ en justifiant soigneusement votre réponse.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y^2 = 0\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x=2\}, \quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y=1\}.$$

A n'est pas un sev car $(1,1) \in A$, $(1,-1) \in A$ et $(1,1)+(1,-1) = (2,0) \notin A$ donc A pas stable par addition.
B n'est pas un sev car $(0,0) \notin B$. De même pour C.

Exercice 4 (Environ 3,5 points) Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses.

1. Un système de 4 équations à 3 inconnues est toujours inconsistant ?
2. Il existe une matrice 3×4 de rang 4
3. Si A est une matrice 3×4 et $V \in \mathbb{R}^4$ alors $A.V$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
4. Si A est une matrice 4×4 de rang 4 n'importe quel système linéaire dont la matrice des coefficients est A admet une solution et une seule.

5. Il existe un système de trois équations linéaires à trois inconnues qui a exactement trois solutions.

6. Un système linéaire avec cinq équations et quatre inconnues possède ou bien une infinité de solutions ou bien aucune solution.

7. Si A est une matrice 4×4 tq le système $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ admet une seule solution, alors le système $AX = \vec{0}$ admet une unique solution.

Un système de 4 équations à 3 inconnues peut tout à fait être consistant. Par exemple $x = 2, y = 1, z = 3, x+y+z = 6$. Plus généralement, lorsque la FREL de la matrice étendue du système ne contient pas la ligne $(0 \dots 0|1)$ le système est consistant.

Une matrice de taille 3×4 a au plus 3 pivots, elle est donc de rang au plus 3.

Si $V \in \mathbb{R}^4$ et $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ alors $A.V \in \mathbb{R}^3$ par définition du produit matriciel.

Si $A \in M_4(\mathbb{R})$ est de rang 4 alors elle est inversible et tout système $AX = b$ équivaut à $X = A^{-1}b$ et a donc une unique solution.

Un système linéaire a toujours $0, 1$ ou une infinité de solutions quel que soit le nombre d'équations et d'inconnues.

Si $A \in M_4(\mathbb{R})$ est tq le système $AX = (1, 2, 3, 4)$ admet une unique solution, alors A est de rang 4 donc inversible. Donc le système $AX = 0$ admet une unique solution $X = 0$.

Exercice 5 (Environ 3 points) Dans cet exercice, les systèmes linéaires devront être résolus par la méthode de Gauss-Jordan.

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 0, -3, -1)$, $v_3 = (-2, -4, 2, 1)$ et $v_4 = (3, 6, 0, 2)$.
a) Les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 appartiennent-ils au sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y = 2x\}$
b) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?
c) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?
d) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
e) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?

a) Oui, vérification immédiate.

b) Dire que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre signifie que si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Résolvons le systeme $\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 0 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 0 & - & 4\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & - & 3\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 4\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$ L'algorithme de GJ donne successivement

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19/3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -8/3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi, la seule solution de ce système est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

c) Pour la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) la vérification est similaire. Par GJ on a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -9 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & -10 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -8/3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & -10 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -8/3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -8/3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi il y a une infinité de solutions non nulles, de la forme $(-\lambda_4, -\lambda_4/3, \lambda_4, \lambda_4)$, de sorte que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est liée;

d) $\mathbb{R}^4$ est de dim 4 donc (v_1, v_2, v_3) ne peut pas être génératrice.

e) La famille $(v_1, \dots v_4)$ est liée donc ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$ donc elle n'est pas génératrice.

Commentaire supplémentaire : Le sev F est de dimension 3 car c'est le noyau de la forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z, t) \to y - 2x$. Le théorème du rang dit donc $\dim F + \dim \mathbb{R} = 4$. Or (v_1, v_2, v_3) sont dans F, cela ne peut donc pas être une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$. Mais comme $(v_1, \dots v_4)$ est liée, cela signifie que v_4 est dans F aussi.

Exercice 6 (Environ 4 points) Dans cet exercice, les systèmes linéaires devront être résolus par la méthode de Gauss-Jordan.

Dans $\mathbb{R}^4$, soient $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, -1)$, et $v_4 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
a) Vérifier qu'ils appartiennent au sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$.
b) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?
c) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
d) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de F ?
e) A l'aide du théorème du rang appliqué à $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y, z, t) = x + y + z + t$, déterminez la dimension de F.
f) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
g) Cette famille forme-t-elle une base de F ?

a) immédiat.

b) La famille est incluse dans le sev F qui est de dimension 3 par exemple par le thm du rang (noyau d'une forme linéaire, hyperplan). Donc cette famille de 4 vecteurs n'est pas libre car incluse dans un ev de dim 3.

Mais si on n'a pas encore calculé la dim de F on fait GJ et on trouve qu'elle n'est pas libre.

c) Elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^4$ car incluse dans F qui est un sev strictement inclus dans $\mathbb{R}^4$.

d) La famille (v_1, v_2, v_3) est libre dans F de dimension 3 donc c'est une base donc elle est génératrice de F. A plus forte raison, (v_1, v_2, v_3, v_4) est génératrice de F.

e) déjà dit avant F est de dim 3.

f) Ce n'est pas une base sinon elle serait génératrice cf plus haut ce n'est pas le cas.

g) Ce n'est pas non plus une base de F car elle n'est pas libre.

Exercice 7 (Environ 2 points) Vrai ou faux, justifiez soigneusement vos réponses.
a) Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^3$. La famille (u_1, u_3) est-elle libre ?
b) Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^3$ et $v \in \mathbb{R}^3$. La famille (u_1, u_2, u_3, v) est-elle génératrice ?
c) Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^2$. La famille (u_1, u_2, u_3, v) est-elle génératrice ?
d) Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^2$. La famille (u_1, u_2, u_3, v) est-elle libre ?

a) Si (u_1, u_2, u_3) engendre $\mathbb{R}^3$ alors c'est une base de $\mathbb{R}^3$ donc elle est libre donc (u_1, u_3) aussi.

b) Si on ajoute un vecteur à une famille génératrice, la famille reste génératrice (car le sev engendré par une famille plus grande est plus grand)

c) oui, idem

d) Une famille de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ ne peut pas être libre. Car $\mathbb{R}^2$ de dim 2.

Exercice 8 (Environ 2 points) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par

$$v_1 = (1, -1, 3, 2), \quad v_2 = (3, -1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, -6, -3) \quad \text{et} \quad v_4 = (0, 2, -9, -5).$$

a) Déterminez la dimension de F et donnez-en une base.
b) Soit

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}.$$

Montrez que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$, donnez une base de G et calculez sa dimension.
c) Montrez que $F \subset G$.
d) A-t-on $F = G$?

a) F est de dimension au plus 4. La famille (v_1, v_2) est libre car les deux vecters ne sont pas colinéaires. Donc $\dim F \geq 2$. Les vecteurs (v_1, v_2, v_3, v_4) forment une famille de rang 2 de F. Ceci se vérifie par GJ. Or $F = Vect(v_1, \ldots, v_4)$ donc $\dim F = 2$. Une base est par ex (v_1, v_2)

b) C'est le noyau d'une forme lin c'est donc un sev de dim 3. Une base est $(1, 0, 0, 1/4)$, $(1, 1, 0, 0), (1, 0, -1/2, 0)$

c) v_1 et v_2 sont dans G donc toute comb lin aussi donc $F \subset G$.

d) $F \neq G$ car ils ne sont pas de même dimension;

Contrôle continu numéro 2 - deux heures - mardi 19 décembre 2017

Exercice 1 Pour chacune des applications linéaires ci-dessous, dessinez la base canonique et son image, puis donnez la matrice de l'application linéaire dans la base canonique.

- La réflexion par rapport à la droite d'équation $x = 0$ dans $\mathbb{R}^2$
- la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans $\mathbb{R}^2$
- la rotation de centre 0 et d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$
- la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x = 0$
- la réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $y = 0$

Voir précédent CC

Exercice 2 (Environ 1,5 points) Dessinez les ensembles suivants, et précisez lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ en justifiant soigneusement votre réponse.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 - y^2 = 0\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, x = 2\}, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, x + y = 1\}\,.$$

Voir précédent CC

Exercice 3 ( ) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par

$$v_1 = (1, -1, 3, 2), \quad v_2 = (3, -1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, -6, -3) \quad \text{et} \quad v_4 = (0, 2, -9, -5).$$

1. Quelle est la définition de la dimension d'un sous-espace vectoriel ?
2. Quelle est la définition du rang d'une famille de vecteurs ?
3. A l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan correctement détaillé, déterminez la dimension de F. Justifiez votre méthode.
4. Donnez-en une base.
5. Soit
$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}.$$
Montrez que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
6. Donnez sa dimension.
7. Donnez une base de G
8. Montrez que $F \subset G$.
9. A-t-on $F = G$?

F est de dimension au plus 4. La famille (v_1, v_2) est libre car les deux vecters ne sont pas colinéaires. Donc $\dim F \geq 2$. Les vecteurs (v_1, v_2, v_3, v_4) forment une famille de rang 2 de F. Ceci se vérifie par GJ. Or $F = Vect(v_1, \dots, v_4)$ donc $\dim F = 2$. Une base est par ex (v_1, v_2)

G est le noyau d'une forme lin c'est donc un sev de dim 3. Une base est $(1, 0, 0, 1/4), (1, 1, 0, 0), (1, 0, -1/2, 0)$

v_1 et v_2 sont dans G donc toute comb lin aussi donc $F \subset G$.

$F \neq G$ car ils ne sont pas de même dimension;

Exercice 4 Calculer les déterminants des matrices suivantes de la manière la plus rapide possible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 9 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ -\sqrt{2} & 3 & 3 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Pour la matrice B on voit immédiatement que la troisième colonne est égale à la deuxième moins la premiere donc B est de rang au plus deux donc le déterminant de B est nul Pour calculer $\det A$ on développe par / à la 3eme colonne. On obtient

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 9 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 8 \end{vmatrix} &= (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 9 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & 8 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \\ 9 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\left(7 \times \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + 8 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}\right) + 7 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} \\
&= -7 \times (72 - 25) - 8 \times (-13) + 7 \times (-26) - 4 \times (-13) = \cdots = -355
\end{aligned}$$

Exercice 5 Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Soient $v_1 = (1,-1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (-1,1,2)$.

1. Montrez que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ en utilisant Gauss-Jordan.
2. Même question à l'aide du déterminant $\det(v_1, v_2, v_3)$
3. Calculez $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$.
4. Déterminez la matrice A associée à f dans la base $\mathcal{B}$.
5. Déduisez-en que f est une symétrie par rapport à un plan vectoriel que l'on déterminera.
6. Ecrivez la matrice P de l'application identité de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique.
7. A l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan, calculez P^{-1}.
8. Quelle est la relation entre P, P^{-1}, A, M. Faites un diagramme.

GJ donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un calcul de determinant, par ex avec la regle de Sarrus, donne $\det(v_1, v_2, v_3) = 6$

Un calcul élémentaire donne $f(v_1) = -v_1,\ f(v_2) = v_2,\ f(v_3) = v_3$ D'où $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $A^2 = I_3$ ou encore $f \circ f = Id$, donc f est une symétrie orthogonale par rapport au plan $vect(v_2, v_3)$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$ et

$M = PAP^{-1}$

Exercice 6 (Diagonalisation, environ 25 minutes, $\simeq$ 6 points) Soit $E = \mathbb{R}^4$, et $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (-4x - 32y + 4z + 18t, 6y - 3t, -2x - 10y + 2z + 6t, 6y - 3t)\,.$$

1. Donnez la matrice A de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de E.
2. Calculez son polynôme caractéristique.
3. Quelle est la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'une application linéaire.
4. Quelles sont les valeurs propres de f ?
5. Pouvez-vous en déduire directement si elle est diagonalisable ou pas ?
6. Calculez les espaces propres de f.
7. Donnez une base (b_1, b_2, b_3, b_4) de E constituée de vecteurs propres de f.
8. Donnez (sans calculs) la matrice D de f dans la base (b_1, b_2, b_3, b_4).
9. Donnez la matrice P de l'application identité de (b_1, b_2, b_3, b_4) vers (e_1, e_2, e_3, e_4).
10. Calculez P^{-1}.
11. Faites un diagramme et donnez la relation entre A, P, D, P^{-1}.
12. Comment fait-on pour calculer A^{17} ? On ne demande pas le résultat du calcul mais la méthode.

On a $A = \begin{pmatrix} -4 & -32 & 4 & 18 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \\ -2 & -10 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ Elle n'est pas symétrique, on ne peut donc rien dire avant calcul. Son polynôme caractéristique se calcule en développant par rapport à la 2me ligne par exemple. On trouve

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X+44 & 32 & -4 & -18 \\ 0 & X-6 & 0 & 3 \\ 2 & 10 & X-2 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & X+3 \end{vmatrix} = \cdots = X^2(X-3)(X+2)$$

Les valeurs propres sont $0, 3, -2$. Elle n'a que 3 valeurs propres dans $\mathbb{R}^4$, on ne peut encore pas en déduire si elle est diagonalisable ou pas. On calcule par Gauss Jordan

$$E_0 = Kerf = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs forment une base deE_0. De même, par Gauss Jordan,

$$E_{-2} = Ker(f + 2Id) = Ker(A + 2I_4) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et pour finir

$$E_3 = Vect(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On prend $b_1 = (1, -1, 2, -2)$, $b_2 = (1, 0, 1, 0)$, $b_3 = (2, 0, 1, 0)$ et $b_4 = (-2, 1, 0, 1)$. La matrice D de f dans la base (b_i) est $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice de passage P de la base (b_i) vers la base (e_i) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule son inverse par Gauss Jordan, et on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Le diagramme usuel nous dit que $A = PDP^{-1}$ de sorte que

$$A^{17} = PD^{17}P^{-1} = P.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{17} \end{pmatrix}.P^{-1}.$$

Université Rennes — L2 MIASHS - Algèbre III — 2018-2019

Barbara Schapira — Corrigé du contrôle continu du 7 novembre 2018

Exercice 1 Dessinez les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Lesquels sont des sous-espaces vectoriels ? Justifiez votre réponse.

1. $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y = 0\}$
2. $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1\}$
3. $F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y^2 = 0\}$
4. $F_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$
5. $F_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3,\ x = y = 0\}$

Corrigé L'ensemble F_1 est le noyau de l'application linéaire $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \to x + 2y$. C'est donc un sev de $\mathbb{R}^2$. Plus directement, on vérifie que $0_{\mathbb{R}^2} \in F_1$. Si $(x,y) \in F_1$ et $(x',y') \in F_1$, alors $x + 2y = 0$ et $x' + 2y' = 0$ donc $(x + x') + 2(y + y') = 0$, donc $(x + x', y + y') \in F_1$. De même, si $(x,y) \in F_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \in F_1$, car $\lambda x + 2\lambda y = \lambda(x + 2y) = 0$.

F_2 n'est pas un sev car $(0,0) \notin F_2$.

F_3 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$ car $(1,1) \in F_3$, $(1,-1) \in F_3$ et pourtant, $(1,1) + (1,-1) = (2,0) \notin F_3$.

F_4 n'est pas un sev car $(1,0) \in F_4$ et pourtant $2.(1,0) = (2,0)$ n'est pas dans F_4 car $2^2 > 1$.

F_5 est un sev de $\mathbb{R}^3$ car $(0,0,0) \in F_5$, et les propriétés de stabilité par addition de deux vecteurs, et multiplication par un scalaire, sont évidentes. C'est une droite, c'est l'axe vertical dans la représentation classique des trois axes de coordonnées.

Exercice 2 **a)** Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Vous justifierez très soigneusement votre réponse

$$\begin{aligned}
f_1 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (x, 2x, y) \in \mathbb{R}^3 \\
f_2 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (3x + y^2, y + z) \in \mathbb{R}^2 \\
f_3 : (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 &\mapsto (x - t, y - t, tx, x + y + z, x + y + z + t) \in \mathbb{R}^5
\end{aligned}$$

b) Pour celles qui sont linéaires, calculer leur noyau $\ker f_i$ et leur image Imf_i. En déduire lesquelles sont injectives, ou surjectives, ou bijectives.

Corrigé f_1 est linéaire car

$$f_1((x,y,z)+(x',y',z')) = f_1((x+x';y+y',z+z')) = (x+x', 2(x+x'), y+y') = (x,2x,y)+(x',2x',y') = f_1(x,y,z)+f_1$$

et

$$f_1(\lambda(x,y,z)) = f_1((\lambda x, \lambda y, \lambda z)) = (\lambda x, 2\lambda x, \lambda y) = \lambda(x, 2x, y) = \lambda f_1((x,y,z))$$

f_2 n'est pas linéaire car $f_2(2.(0,1,0)) = f_2((0,2,0)) = (4,2)$ alors que $2 \times f_2(0,1,0) = 2 \times (1,1) = (2,2)$.

f_3 n'est pas linéaire car $2 \times f_3((1,0,0,1)) = 2 \times (0,-1,1,1,2) = (0,-2,2,2,4)$ alors que $f_3(2 \times (1,0,0,1)) = f_3((2,0,0,2)) = (0,-2,4,4,4) \neq (0,-2,2,4,4)$.

Le noyau de f_1 est l'ensemble $\ker f_1 = \{(x,y,z), x = 0, 2x = 0, y = 0\} = \{(0,0,z), z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.(0,0,1) = Vect((0,0,1))$. Donc f_1 n'est pas injective.

L'image de f_1 est l'ensemble des $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ tels qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $u = x$, $v = 2x$, $w = y$. Autrement dit, $(u,v,w) = x(1,2,0) + y(0,0,1)$. Autrement dit, $Imf_1 = Vect((1,2,0),(0,0,1))$. C'est un sev de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$, car ces deux vecteurs forment manifestement une famille libre. Donc f_1 n'est pas surjective non plus.

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^5$, on considère les vecteurs $v_1 = (1,2,3,4,4)$, $v_2 = (0,0,-3,-1,-1)$, $v_3 = (-2,-4,2,1,1)$ et $v_4 = (3,6,0,2,2)$.

1. Les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 appartiennent-ils au sous-espace vectoriel
$$F = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5,\ \ y = 2x,\ \text{ et }\ t = u\} \quad ?$$
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?
3. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?
4. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^5$?

5. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle génératrice de F ?

6. Quelle est la dimension de $Vect(v_1, v_2, v_3)$?

7. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^5$?

8. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de F ?

9. Quelle est la dimension de $Vect(v_1, v_2, v_3, v_4)$?

10. Donnez une base de F.

Corrigé Le vecteur v_1 vérifie les équations définissant F : $2 = 2 \times 1$ et $4 = 4$ donc $v_1 \in F$. De même, $v_2 \in F$, $v_3 \in F$, $v_4 \in F$.

Pour savoir si la famille (v_1, v_2, v_3) est libre, on fait l'algorithme de GJ sur la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19/3 \\ 0 & 0 & 19/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -8/3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DOnc le rang de cette matrice est 3, donc la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

Au passage, on déduit du nombre de pivots que $\dim Vect(v_1, v_2, v_3) = 3$.

Pour savoir si la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre, on fait l'algorithme de GJ sur la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -9 \\ 0 & -1 & 9 & -10 \\ 0 & -1 & 9 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -8/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19/3 & -7 \\ 0 & 0 & 19/3 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -8/3 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -21/19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, la famille est de rang 3, donc n'est pas libre. De même que ci-dessus, on déduit du nombre de pivots que $\dim Vect(v_1, v_2, v_3, v_4) = 3$.

La famille (v_1, v_2, v_3) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^5$ qui est de dimension 5 car toute famille génératrice de $\mathbb{R}^5$ a au moins 5 vecteurs.

Le même argument dit que (v_1, v_2, v_3, v_4) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^5$.

La famille (v_1, v_2, v_3) est génératrice de F. En effet, $Vect(v_1, v_2, v_3) \subset F$, et $\dim Vect(v_1, v_2, v_3) = 3$. De plus, nous allons vérifier que $\dim F = 3$, ce qui montrera que $F = Vect(v_1, v_2, v_3)$, donc que la famille est génératrice. F est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $\left\{ \begin{array}{c} y = 2x \\ t = u \end{array} \right.$. La matrice du système est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et sa FREL est $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Autrement dit il y a deux pivots, donc la dimension de l'espace F des solutions est $5 - 2 = 3$, donc $\dim F = 3$.

La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est incluse dans F et génératrice de F puisque la sous famille (v_1, v_2, v_3) l'est.

La famille (v_1, v_2, v_3) est une base de F, puisqu'elle est libre, et génératrice de F.

Exercice 4 Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (X, Y, Z)$ avec

$$X = x - y + z + t, Y = x + 2z - t, Z = x + y + 3z - 3t.$$

1. Quelle est la matrice A de f dans les bases canoniques (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$ et (E_1, E_2, E_3) de $\mathbb{R}^3$?

2. Montrer que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathrm{Im} f$ et que $\mathcal{B} = (f(e_1), f(e_2), E_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

3. Quel est le rang de f ?

4. Montrer que $\ker f$ est de dimension 2 et donner une base (u_1, u_2) de $\ker f$.

5. Vérifier que $\mathcal{C} = (e_1, e_2, u_1, u_2)$ est une base de $\mathbf{R}^4$.

6. Quelle est la matrice B de f de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$?

7. Quelle est la matrice P de l'identité de $\mathbb{R}^4$ de la base $\mathcal{C}$ vers la base canonique $(e_1, \dots, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$?

8. Quelle est la matrice Q de l'identité de $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base canonique (E_1, E_2, E_3) de $\mathbb{R}^3$?

9. Quelle relation satisfont les matrices A, B, P, Q ? Faites un diagramme.

Corrigé La matrice A vaut $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

L'image $Im(f)$ est engendrée par les vecteurs colonnes de A. L'algorithme de Gauss Jordan aboutit à $Frel(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc f est de rang 2, et $Im(f)$ est de dimension 2. Les deux premières colonnes de A sont les coordonnées de $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Il est donc clair (règle des zéros par exemple) que ces vecteurs ne sont pas colinéaires. L'algorithme de Gauss Jordan montre que la famille $(f(e_1), f(e_2), E_3)$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ de dim 3.

Le théorème du rang nous dit que $rg(f) + \dim Kerf = 4$. Donc $Ker(f)$ est de dimension 2. La forme de $Frel(A)$ nous donne les relations de liaison suivantes entre les colonnes : $C_3 = 2C_1 + C_2$ et $C_4 = -C_1 - 2C_2$, ce qui nous donne deux vecteurs $u_1 = (2, 1, -1, 0)$ et $u_2 = (1, 2, 0, 1)$ indépendants l'un de l'autre dans $Ker(f)$. L'argument de dimension assure que c'est une base de $Ker(f)$.

L'algorithme de gauss Jordan assure que (e_1, e_2, u_1, u_2) est libre, donc une base de $\mathbb{R}^4$ (car 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ de dim 4)

La matrice B s'obtient immédiatement : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice P vaut $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
La matrice Q vaut $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Et on vérifie que $B = Q^{-1}AP$, avec $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Corrigé du CC2- mercredi 19 décembre 2018

Exercice 1 (20 minutes, 4 points) Rappelez les définitions suivantes le plus précisément possible, en y ajoutant un exemple. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

1. Qu'est-ce qu'un sous-espace vectoriel de E ? Exemple ?
2. Qu'est-ce qu'une application linéaire de E dans F ? Exemple ?
3. Qu'est-ce que le noyau d'une application linéaire de E dans F ? Exemple ?
4. Qu'est-ce que l'image d'une application linéaire de E dans F ? Exemple ?
5. Qu'est-ce qu'une famille libre de E ? Exemple ?
6. Qu'est-ce qu'une famille génératrice de E ? Exemple ?
7. Qu'est-ce qu'une base de E ? Exemple ?
8. Qu'est-ce que la dimension de E ? Exemple ?
9. Si $f : E \to E$ est une application linéaire de E dans E, qu'est-ce qu'une valeur propre de f ?
10. Si $f : E \to E$ est une application linéaire de E dans E, que signifie la phrase « *f est diagonalisable* » ?

Corrigé

1. Un seV de E est un sous-ensemble $F \subset E$ qui est stable par addition et multiplication, au sens où pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u}+\vec{v} \in F$ et $\lambda\vec{u} \in F$. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.
2. Une application linéaire de E dans F est une fonction $f : E \to F$ qui préserve l'addition et la multiplication au sens où $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ et $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$. Exemple : $f(x, y, z) = 2x + y$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
3. Le noyau d'une application linéaire f est l'ensemble $Ker(f) = \{\vec{u} \in E, f(\vec{u}) = \vec{0}\}$. C'est un sev. Pour l'application précédente, c'est l'ensemble $\{(x, -2x, z), x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$.
4. L'image de f est l'ensemble $Im(f) = \{\vec{w} \in F, \exists\vec{u} \in E, f(\vec{u}) = \vec{w})\}$. Pour l'application ci-dessus, $Im(f) = \mathbb{R}$.
5. Une famille libre de E est un ensemble de vecteurs sans vecteurs redondants. Ou encore, c'est une famille $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ de vecteurs tq si $\lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{u}_k = \vec{0}$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_k = 0$.
6. Une famille génératrice de E est une famille $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ de vecteurs tq tout vecteur $\vec{w}$ de E peut s'écrire sous la forme $\vec{w} = \lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{u}_k$.
7. Une base de E est une famille libre et génératrice de E.
8. La dimension de E est le cardinal d'une base. (Toutes les bases ont le même cardinal).
9. Une valeur propre de f est un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $\vec{u} \neq \vec{0}$ dans E tq $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.
10. $f : E \to E$ est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale. Ou encore si E admet une base de vecteurs propres de f.

Exercice 2 (15 minutes, 4 points) Répondez aux questions suivantes par vrai ou faux en justifiant votre réponse par une démonstration ou un exemple ou contre-exemple.

1. Une application linéaire peut être injective
2. Une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^5$ est toujours injective
3. Une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^5$ n'est jamais injective
4. Une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^5$ est toujours surjective
5. Une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^5$ n'est jamais surjective.
6. Une application linéaire de $\mathbb{R}^5$ **dans** $\mathbb{R}^5$ n'est jamais diagonalisable.
7. Une application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^5$ est toujours diagonalisable.
8. Une application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^5$ qui n'a qu'une seule valeur propre n'est jamais diagonalisable.

9. Une application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^5$ qui a trois valeurs propres distinctes est diagonalisable.
10. Une application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^5$ qui a cinq valeurs propres distinctes est diagonalisable.
11. Une application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^5$ a toujours au moins une valeur propre.
12. Une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ a toujours au moins une valeur propre.

Corrigé

1. VRAI : Une application linéaire peut être injective, par exemple l'application $Id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est injective.
2. FAUX. L'application $f(x, y, z) = (x, x, x, x, x)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^5$ a pour noyau $Ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\}$. C'est un sev non nul. Donc f n'est pas injective.
3. FAUX. L'application $g(x, y, z) = (x, x, y, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^5$ est injective, $Ker(g) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
4. FAUX : l'application g ci-dessus n'est pas surjective. Par exemple le vecteur $(1, 2, 3, 4, 5)$ n'est pas dans l'image de g car $1 \neq 2$.
5. VRAI. Une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^5$ n'est jamais surjective. En effet, le théorème du rang assure que la dimension de son image est inférieure ou égale à 3. Donc ça ne peut pas être tout $\mathbb{R}^5$.
6. FAUX. L'application $f(\vec{v}) = 2\vec{v}$ de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^5$ est une homothétie, donc diagonalisable.
7. FAUX. L'application $f(x, y, z, t, u) = (x + y, y, z + t, t, u)$ n'est pas diagonalisable. Elle n'a que 1 comme VP mais l'espace propre E_1 n'est pas de dimension 5 donc on ne peut pas trouver de base de vecteurs propres. D'ailleurs si elle Ã©tait diagonalisable avec uniquement la vp 1 ce serait l'identité.
8. FAUX. Une homothétie n'a qu'une seule valeur propre et est diagonalisable.
9. FAUX. Regarder $g(x, y, z, t, u) = (x + y, y, 2z + t, 2t, 3u)$. Elle a pour vp $1, 2, 3$ et n'est pas diagonalisable car la somme des espaces propres n'est pas égale à $\mathbb{R}^5$.
10. VRAI. C'est dans le cours. Si on prend un vecteur propre pour chacune des vp distinctes, on aura une base de vecteurs propres.
11. VRAI. En effet, le polynôme est un polynôme de degré 5 donc il tend vers $\pm\infty$ en $-\infty$ et $\mp\infty$ en $+\infty$. Donc il s'annule, il a une racine qui est une vp d'après le cours.
12. FAUX . La rotation d'angle $\pi/2$ n'a aucune VP, vu en cours.

Exercice 3 (1 heure, 10 points) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + 3y, 3x - 2y - z, -y + z) .$$

1. Rappeler ce qu'est la base usuelle (canonique) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)$.
3. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Rappeler la définition du polynôme caractéristique de f.
5. Calculer le polynôme caractéristique de f.
6. Donner les valeurs propres de f.
7. Calculer les espaces propres de f.
8. L'application f est-elle diagonalisable ?
9. Si oui, donner une base $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f.
10. Montrer que la matrice D de f dans cette nouvelle base convenablement ordonnée est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.
11. Faites un diagramme, et calculez la matrice P de l'application identité de la base $(\vec{b}_i)$ vers la base $(\vec{e}_i)$.
12. Quelle est la relation entre A, D, P, P^{-1} ?
13. Calculer P^{-1}

14. Expliquer (sans faire les calculs) comment calculer A^{100} à l'aide des questions précédentes.

Corrigé

1. $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. C'est la base qui fait que par définition $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit $xe_1 + ye_2 + ze_3$
2. $f(e_1) = (1,3,0), f(e_2) = (3,-2,-1), f(e_3) = (0,-1,1)$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\chi_A(X) = \det(X.Id - A)$.
5. $\chi_A(X) = (X-1)(X-3)(X+4)$
6. Les valeurs propres sont $1, 3, -4$
7. f a trois valeurs propres distinctes donc est diagonalisable.
8. On calcule $E_1 = Ker(f - Id)$ par GJ. On trouve $E_1 = Vect((1,0,3))$ et on pose $\vec{b_1} = (1,0,3)$. De même, $E_3 = Ker(f - 3Id) = Vect((3,2,-1))$ avec $\vec{b_2} = (3,2,-1)$. $E_{-4} = Ker(f + 4Id) = Vect((3,-5,1)$ avec $\vec{b_3} = (3,-5,-1)$
9. D est donnée dans l'énoncé puisque par définition $f(b_1) = b_1,\ f(b_2) = 3b_2$ et $f(b_3) = -4b_3$.
10. Le diagramme ... comme d'habitude et P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs b_1, b_2, b_3, i.e. $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
11. On a $A = PDP^{-1}$
12. On applique GJ à $(P|Id)$ et on trouve $(Id|P^{-1})$ avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 3/10 \\ 3/14 & 1/7 & -1/14 \\ 3/35 & -1/7 & 1/35 \end{pmatrix}$
13. On écrit $A^{100} = PD^{100}P^{-1}$ et le calcul de D^{100} est immédiat $D^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{100} & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^{100} \end{pmatrix}$

Exercice 4 (20 minutes, 4 points) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$v_1 = (1,2,3,0) \quad v_2 = (0,1,2,3) \quad v_3 = (2,3,4,-3)$$

ainsi que les sous-espaces vectoriels $F_1 = Vect(v_1)$ $F_2 = Vect(v_1, v_2)$ $F_3 = Vect(v_1, v_2, v_3)$.
On considère les vecteurs suivants

$$w_1 = (1,1,1,1) \quad w_2 = (1,-1,1,-1) \quad w_3 = (-3,-4,-5,6)$$

1. Est-ce que le vecteur w_1 appartient à F_1? à F_2 ? à F_3 ?
2. Même question avec w_2 ?
3. Même question avec w_3 ?
4. Quelle est la dimension de F_1 ? En donner une base.
5. Quelle est la dimension de F_2 ? En donner une base.
6. Quelle est la dimension de F_3 ? En donner une base.
7. Déterminer toutes les manières d'écrire le vecteur $u = (1,3,5,3)$ comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3.

Corrigé

1. w_1 n'est pas colinéaire avec v_1 donc il n'appartient pas à F_1. GJ appliqué à v_1, v_2, w_1 donne 3 pivots donc w_1 n'est pas combinaison linéaire de v_1 et v_2, donc $w_1 \notin F_2$. GJ appliqué à v_1, v_2, v_3 donne 2 pivots donc $F_3 = F_2$ donc w_1 n'est pas combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3, donc $w_1 \notin F_3$.

2. w_2 n'est pas colinéaire à v_1 donc pas dans F_1. GJ avec v_1, v_2, w_1 donne 3 pivots donc w_2 n'est pas combinaison linéaire de v_1 et v_2, donc $w_2 \notin F_2$. Et $F_3 = F_2$ donc $w_2 \notin F_3$.

3. w_3 n'est pas coliéaire à v_1 donc pas dans F_1. GJ avec v_1, v_2, w_3 donne 2 pivots donc w_3 est dans F_2. A plus forte raison w_3 est dans F_3.

4. F_1 est engendré par v_1 qui forme une base, donc F_1 est de dimension 1

5. F_2 est engendré par v_1 et v_2 qui ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre, et par définition génératrice de F_2. Donc F_2 est de dimension 2 et (v_1, v_2) est une base.

6. On a vu tout à l'heure que GJ appliqué à v_1, v_2, v_3 donne 2 pivots et $F_3 = F_2$. En particulier, (v_1, v_2) est une base de F_3, de dimension 2.

7. On cherche comment écrire $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = u$. Ceci revient à effectuer GJ appliqué à $v_1, v_2, v_3|u$. Ceci donne $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Autrement dit, on en déduit que $x_1 + 2x_3 = 1$ et $x_2 - x_3 = 1$. Ainsi on choisir $x_3 = 0$ et écrire $u = v_1 + v_2$, ou encore prendre $x_3 = \lambda$ arbitraire et écrire $u = (1-2\lambda)v_1 + (1 + \lambda v_2) + \lambda v_3$.