DS 1 (21 février)

Durée 45 minutes, calculatrices et documents interdits

Exercice 1. Dans l'exercice, k et n désignent des nombres entiers ($n \geq 1$). *Vérifiez pour les petites valeurs de n que les formules que vous donnez fournissent des valeurs correctes.*

1. Que valent les sommes
$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} k \ ?$$
2. Calculer la somme
$$\sum_{k=0}^{n-1} ((k+1)^3 - k^3).$$
On pourra écrire les termes successifs à sommer et montrer comment la somme se simplifie ou bien écrire la somme comme la différence de deux sommes puis faire un changement d'indice pour l'une de ces deux sommes.
3. Donner une expression développée de $(k+1)^3$, puis de $(k+1)^3 - k^3$. En déduire une autre écriture de la somme $\sum_{k=0}^{n-1}((k+1)^3 - k^3)$, puis une expression de $\sum_{k=0}^{n-1} k^2$ en fonction des trois sommes évoquées dans les deux premières questions.
4. Déduire des questions précédentes une expression simple de
$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2.$$

Exercice 2. On souhaite calculer de deux façons différentes
$$\int_0^1 (1 - t^2)\ dt$$

1. Faire le calcul en utilisant une primitive.
2. Pour chaque entier $n \geq 1$, on considère la fonction en escalier ϕ_n constante égale à $1 - (\frac{k}{n})^2$ sur l'intervalle $[k/n, (k+1)/n[$ (pour k variant de 0 à $n-1$).
   a. Tracer le graphe de ϕ_3.
   b. Calculer I_n l'intégrale de ϕ_n.
   c. Trouver la limite de I_n (lorsque n tend vers l'infini) en utilisant la formule trouvée à la question 4 de l'exercice 1.

Exercice 3. Calculer l'intégrale suivante
$$J(T) = \int_0^T xe^{-x}\ dx.$$
Quelle est la limite de $J(T)$ lorsque T tend vers $+\infty$?