

Feuille d'exercices 6

Exercice 1. Calculer les développements limités des fonctions suivantes en 0 :

- (1) $\sin x + \tan x$ à l'ordre 3,
- (2) $\exp(\arctan x)$ à l'ordre 3,
- (3) $\ln(3 + x^2)$ à l'ordre 5,
- (4) $\frac{x}{1-x^2}$ à l'ordre 6,
- (5) $\arccos x$ à l'ordre 5,
- (6) $\frac{1}{1+e^x}$ à l'ordre 4,
- (7) $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$,
- (8) $\ln(1 + 2x + x^3)$ à l'ordre 4,
- (9) $\frac{1}{(1+x)^2}$ à l'ordre 3
- (10) $\frac{\sin x}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 4.

Exercice 2. Calculer les développements limités des fonctions suivantes au point et à l'ordre indiqué :

- (1) $\ln x$ à l'ordre 3 en 2,
- (2) $\sin x$ à l'ordre 3 en $\pi/3$,
- (3) $\frac{e^x}{x^2-2}$ à l'ordre 3 en 1,
- (4) $x^x - \sqrt{x}$ à l'ordre 4 en 1.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x - \sin 2x}{\ln(1+x^2)}$,
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cosh x - \cos x}{(1+x^2)}$,
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x} \right)$,
- (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1)$,
- (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sinh x)}{x}$,
- (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sinh x)}{\ln x}$,
- (7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln x}$.

Exercice 4. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 et décrire la courbe d'équation $y = f(x)$ au voisinage du point d'abscisse 0 pour chacune des fonctions suivantes :

- (1) $f(x) = 2x + \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) + \cos(2x)$,
- (2) $f(x) = \tan(2x) - \tan(x)$,
- (3) $f(x) = e^{2x} - 2e^x$.

Exercice 5. Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, les asymptotes à la courbe d'équation $y = f(x)$ et étudier la position par rapport à chacune de ses asymptotes :

- (1) $f(x) = (x^3 + x + 1)^{1/3} - (x^2 - x - 1)^{1/2}$,
- (2) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 + x^2 + 1 + \sin x}$,
- (3) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 6. Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs graphes :

- (1) $f(x) = 2^{x-1/x}$,
- (2) $f(x) = (1 - 1/x^2)^{-2x^2}$.

Exercice 7. Montrer que $\ln n - \sum_{k=1}^n 1/k$ a une limite finie quand n tend vers l'infini.

Exercice 8. Déterminer si les **séries** de termes généraux suivants sont convergentes ou divergentes :

(1) $\sin(1/n)$,

(2) $\cos(1 + 1/n^2)(1 - 2/n^2)$,

(3) $\frac{(1-1/n)^{n^3} + 1/n^2}{2 - \sin n}$.

Exercice 9. Soit $m > 1$. Montrer que l'équation :

$$m \ln\left(1 + \frac{x}{m+1}\right) = x$$

a une racine x_m dans $] -2, -1[$. Déterminer $\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m$.

Exercice 10. 1) Calculer le développement limité à l'ordre 4 de la fonction $\cos \ln(1+x)$ au voisinage de 0.

2) Calculer le développement limité à l'ordre 4 de la fonction $\frac{\ln(x)}{x}$ au voisinage de 1.

3) Calculer le développement limité à l'ordre 4 de la fonction $\arctan x$ au voisinage de 0.

4) Calculer la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin\left(\frac{x+1}{x^2+3x+1}\right) - x.$$

Exercice 11. Soient f une fonction deux fois dérivable sur \mathbf{R} et x_0 un réel. Calculer la limite suivante

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}.$$