Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Calculer la dérivée de x^n en tout point en utilisant la définition.

Exercice 2. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, x_0 un élément de I, et soient f, g, g_1, g_2 des fonctions sur I, a et b des réels.
1) On suppose que :
- $|f| \leq g$;
- g est dérivable en x_0 ;
- $g(x_0) = g'(x_0) = 0$.

Montrer que f est dérivable en x_0 et que $f(x_0) = f'(x_0) = 0$.
2) On suppose que :
- $g_1 \leq f \leq g_2$;
- g_1 et g_2 sont dérivables en x_0 ;
- $g_1(x_0) = g_2(x_0) = a$ et $g_1'(x_0) = g_2'(x_0) = b$.

Montrer que f est dérivable en x_0 et que l'on a $f(x_0) = a$ et $f'(x_0) = b$.

Exercice 3. Dans les questions ci-dessous, « fonction » signifie « fonction définie sur $\mathbf{R}$ ».
1) Peut-on trouver une fonction paire (resp. impaire) non continue en 0 ?
2) Peut-on trouver une fonction paire (resp. impaire) continue mais non dérivable en 0 ?
3) Si une fonction paire (resp. impaire) est dérivable en 0, que peut-on dire de sa dérivée ?

Exercice 4. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, x_0 un point de I, et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. On suppose que f admet un maximum local en x_0, et que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0. Montrer que $f'_{\mathrm{d}}(x_0) \leq 0$ (resp. que $f'_{\mathrm{g}}(x_0) \geq 0$). Qu'obtient-on lorsque f est dérivable en x_0 ?

Exercice 5. Soit $a \in \mathbf{R}$ et soit $f :]a, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction dérivable.
1) On suppose que f a une limite finie en $+\infty$. Peut-on en conclure que f' tend vers 0 en $+\infty$?
2) Même question en supposant f monotone.
3) Même question en supposant que f' a une limite en $+\infty$.
4) On suppose que f' tend vers 0 en $+\infty$. Peut-on en conclure que f a une limite finie en $+\infty$?

Exercice 6. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f a une même limite finie en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $f'(a) = 0$.

Exercice 7. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, n un entier positif et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. On suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins n solutions distinctes dans I. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins $n - 1$ solutions distinctes dans I.

Exercice 8. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, m un entier naturel et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction m fois dérivable. On suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins $m+1$ solutions distinctes dans I. Montrer que l'équation $f^{(m)}(x) = 0$ a une solution dans I.

Exercice 9. Soient $n \geq 2$ un entier, et a et b deux réels. On note P la fonction polynôme $x \mapsto x^n + ax + b$. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet au plus trois solutions dans $\mathbf{R}$, et au plus deux si n est pair. Pour n donné (et a, b « variables »), quels sont les valeurs possibles pour le nombre de solutions de l'équation $P(x) = 0$?

Exercice 10. Soient $a < b$ des réels et soient f et g des fonctions sur $[a, b]$. On suppose que f et g sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, et que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.
1) Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b]$.
2) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. (Indication : considérer la fonction

$x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x))$.
3) On suppose que $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ a une limite finie l quand x tend vers a. Montrer que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l.$$

Exercice 11. Montrer, en utilisant sa définition comme solution d'une équation différentielle, que la fonction exponentielle tend vers l'infini en plus l'infini. Puis qu'elle croît plus vite vers l'infini que tout polynôme.

Exercice 12. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$ est dérivable sur $\mathbf{R}$. Calculer sa dérivée en tout point.

Exercice 13. Trouver la limite en plus l'infini de $(x+1)^{3/4} - (x+5)^{3/4}$.

Exercice 14. Démontrer les inégalités suivantes

$$\forall x > 0, \ \frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x, \quad x - x^2 < \ln(1+x) < x - x^2 + x^3.$$

Exercice 15. Soit $\alpha > 1$. Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{\alpha - 1} (\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}).$$

En déduire la convergence de la suite donnée par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 16. Calculer la dérivée de x^α en tout point de $\mathbf{R}_+^*$ en utilisant les règles de dérivation des fonctions composées, la définition de x^α à partir des fonctions logarithme et exponentielle et les dérivées des fonctions logarithme et exponentielle.

Exercice 17. Soit f dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = l \in \mathbf{R}$.
1. Soient $0 < z < x$. Montrer qu'il existe $y \in]z, x[$ tel que

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x-z}{x} f'(y) + \frac{f(z)}{x}, \quad \frac{f(x)}{x} - l = \frac{x-z}{x}(f'(y) - l) + \frac{f(z) - zl}{x}.$$

2. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $z_\epsilon > 0$ tel que

$$\forall x > z_\epsilon, \quad |\frac{f(x)}{x} - l| \leq \epsilon + \frac{|f(z_\epsilon)| + |z_\epsilon||l|}{x}.$$

3. En déduire que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.

Exercice 18. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1, 1]$ telle que $f(-1) = f(1) = 0$.
1. Soit $x_0 \in]-1, 1[$.
(a) Montrer qu'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 tel que la fonction $f + P$ s'annule en -1, 1 et x_0.
(b) En déduire qu'il existe c dans $]-1, 1[$ tel que $2f(x_0) = (x_0^2 - 1) f''(c)$.
2. Montrer que $\sup_{|x| \leq 1} |f(x)| \leq 1/2 \sup_{|x| \leq 1} |f''(x)|$.