Feuille d'exercices 4

Exercice 1. À partir de l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$ et des formules classiques de trigonométrie, montrer la continuité des fonctions sinus, cosinus et tangente sur leurs domaines de définition respectifs.

Exercice 2. Montrer la continuité de la fonction logarithme sur $]0, +\infty[$ à partir des propriétés suivantes :
pour tout x et tout y dans $]0, +\infty[$, on a $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;
pour tout $a > 0$, $|\ln a|$ est l'aire comprise entre l'axe des x, la courbe $y = 1/x$ et les droites $y = 1$ et $y = a$.

Exercice 3. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, n un entier positif et $f_1, f_2, \ldots, f_n : I \to \mathbf{R}$ des fonctions continues. Montrer que la fonction $x \mapsto \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ est continue sur I. (Indications : procéder par récurrence sur n ; pour le cas $n = 2$, on pourra utiliser l'exercice 8, ou bien remarquer que pour x et y dans $\mathbf{R}$ on a $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.)

Exercice 4. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(x) \neq x$ pour tout réel x. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou bien} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Donner un exemple où une seule de ces propriétés est vérifiée, et un exemple où les deux sont vérifiées.

Exercice 5. Soit f une fonction réelle sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
$[f]$ est continue ;
$[f]$ est constante ;
il existe un entier n tel que $f(I) \subset [n, n + 1[$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^7 - 7x + 2$. étudier les variations de f (on admettra les résultats classiques sur la dérivée). En déduire que l'équation $x^7 - 7x + 2 = 0$ a exactement trois solutions dans $\mathbf{R}$.

Exercice 7. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet (au moins) une solution dans $[0, 1]$. L'énoncé est-il encore vrai si l'on remplace « continue » par « croissante » ? L'énoncé est-il encore vrai si l'on remplace $[0, 1]$ par $]0, 1[$?

Exercice 8. Soit n un entier positif. Montrer que l'équation

$$x^2(\cos x)^n + x \sin x + 1 = 0$$

a une infinité de solutions dans $\mathbf{R}$.

Exercice 9. Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$. On suppose que f a des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 10. Dans le cours, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires l'énoncé suivant :
« Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle. »
Réciproquement, déduire le théorème des valeurs intermédiaires l'énoncé ci-dessus.

Exercice 11. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x) := \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}.$$

Montrer que f n'est pas continue sur $\mathbf{R}$, mais qu'elle « vérifie le théorème des valeurs intermédiaires » en un sens que l'on précisera. (Indication : montrer que pour tout $r > 0$, on a $f([0, r]) = f([-r, 0]) = [-1, +1]$).

Exercice 12. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction *monotone*. On suppose que $f(I)$ est un intervalle. Montrer que f est continue.

Exercice 13. Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F, g une application de F dans G. Montrer les implications :
f et g injectives $\Longrightarrow g \circ f$ injective ;
$g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.

Exercice 14. Existe-t-il :
une application continue bijective de $\mathbf{R}$ sur $]-1, 1[$?
une application continue surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^*$?
une application continue bijective de $[0, 1[$ sur $]0, 1[$?
une application continue bijective de $]0, 1[$ sur $[0, 1[$?
une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}^*$?
une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^*$?

Exercice 15. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une application *continue et injective*. Soient x, y, z dans I avec $x < y < z$. Déduire du théorème des valeurs intermédiaires que l'on a soit $f(x) < f(y) < f(z)$, soit $f(x) > f(y) > f(z)$ (autrement dit, la restriction de f à l'ensemble $\{x, y, z\}$ est strictement monotone). En déduire que f est strictement monotone.

Exercice 16. Soit a un réel > 0. Montrer que $\lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbf{N}^*}} a^{1/n} = 1$.

Exercice 17. Vrai ou faux ? Si l'énoncé est vrai, donner une démonstration ; s'il est faux, dessiner le graphe d'une fonction contre-exemple.
1. Si f est continue sur $[a, b]$, f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
2. Si f est continue sur $[a, b]$, f prend au moins une fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
3. Si f est strictement croissante sur $[a, b]$, f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
4. Si f est croissante sur $[a, b]$, f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
5. Si f est continue et bornée sur $[a, b[$, f atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure.
6. Si f est continue et bornée sur $[a, b[$, f atteint sa borne inférieure ou sa borne supérieure.
7. L'image d'un intervalle $[a, b]$ par une fonction continue est un intervalle $[c, d]$.
8. L'image d'un intervalle $]a, b[$ par une fonction continue est un intervalle $]c, d[$.
9. Si f est continue et ne s'annule pas sur $[a, b]$, alors $1/f$ est bornée sur $[a, b]$.
10. Si l'image par f de $[a, b]$ est un segment, alors f est continue sur $[a, b]$.
11. Si l'image par f de $[a, b]$ n'est pas un segment, alors f n'est pas continue sur $[a, b]$.
12. Si f est positive sur $\mathbf{R}_+$ et $\lim_{+\infty} f(x) = 0$, il existe $r > 0$ tel que f soit décroissante sur $[r, +\infty[$.

Exercice 18. Dans les questions ci-dessous, « fonction » signifie « fonction définie sur $\mathbf{R}$ ».
Peut-on trouver une fonction paire (resp. impaire) non continue en 0 ?
Peut-on trouver une fonction paire (resp. impaire) continue mais non dérivable en 0 ?
Si une fonction paire (resp. impaire) est dérivable en 0, que peut-on dire de sa dérivée ?