Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Donner une autre écriture des ensembles suivants
$E_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 18\}$
$E_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1.5 \leq |x| < 3\}$
$E_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x < 10\}$
$E_4 = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
$E_5 = \{\sin x \mid x \in [0, 2\pi]\}$
$E_6 = \left\{ \frac{1}{x^2+1} \,\middle|\, x \in]-1, 1] \right\}$
$E_7 = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$

Exercice 2. Dessiner les ensembles suivants
$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |x - 2y| > 1\}$
$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |x - 2| \leq 1\}$
$E_3 = \mathbb{R}_+ \times [0, 5[$

Exercice 3. Représenter $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$ dans les cas suivants ;
$E = \mathbb{R}$, $A = \{x \in E \mid x^2 - 3x + 1 < 0\}$ et $B = \{x \in E \mid x > 0\}$
$E = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1\}$.

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x = \sqrt{2 - x}$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x - 1} \geq x - 4$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq 2x - 3$.

Exercice 5. Écrire avec des quantificateurs les phrases suivantes.
y est le carré d'un nombre réel.
On peut trouver au moins un rationnel compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
Il existe plusieurs rationnels compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
Tout entier naturel multiple de 6 est multiple de 3.
Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors ces deux entiers sont nuls.

Exercice 6. I - Une histoire de clefs
1) Quelle que soit la porte, il existe une clef qui l'ouvre.
2) Il existe une clef qui ouvre toutes les portes.
À quelle proposition correspond la clef appelée "passe-partout" ?
II - Une histoire d'entiers
1) Quel que soit l'entier naturel, il existe un entier qui soit son double.
2) Il existe un entier égal au double de tous les autres.
Ces propositions sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.
III - Une histoire de majorant
1) Quel que soit le réel x, il existe un majorant de $f(x)$.
2) Il existe un réel qui majore tous les $f(x)$.
a) La fonction f est la fonction $x \mapsto x^2$.
Ces propositions sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.
b) Même question avec $f(x) = \sin x$.
c) À quelle proposition correspond la définition de majorant
IV - Une histoire de période
1) Quel que soit le réel x, il existe un réel T non nul tel que $f(x + T) = f(x)$.

2) Il existe un réel T non nul tel que, pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$.
a) La fonction f est la fonction $x \mapsto \sin x$.
Ces propositions sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.
b) Même question avec la fonction partie entière
c) À quelle proposition correspond la définition de fonction périodique ?

Exercice 7. Donner la négation des assertions suivantes :
$\forall x \in [2,3],\ x^2 - 5x + 6 \leq 0$
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad (|x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$
$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| < M.$
$\forall (x,y,a) \in \mathbb{R}^3,\ \big((x < a \text{ et } y < a) \Longrightarrow \exists z \in \mathbb{R} (z < a \text{ et } x \neq z \text{ et } y \neq z)\big)$

Exercice 8. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante :

Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $1/n$.

Écrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété.
Écrire la négation de cette formule logique.
Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (on pourra montrer que $x_n - x_0 > 1$).

Exercice 9. Soit Ω un ensemble et $A,\ B,\ C$ trois parties de Ω. Simplifier les expressions

$$E = (A \cup B) \cap ({}^cA \cup B) \cap (A \cap {}^cB) \text{ et } F = (A \cup B) \cap ({}^cA \cup B) \cap (A \cup {}^cB).$$

Parmi les propositions suivantes, prouver celles qui sont vraies donner des contre-exemples pour les autres.
(a) ${}^c(A \cup {}^cB) = {}^cA \cap B$,
(b) $(A \cup B = \Omega)$ entraîne $A \subset {}^cB$,
(d) $(A \cup B = \Omega)$ entraîne ${}^cA \subset B$,
(e) ${}^c({}^c(A \cap B)) = A \cap B$

Exercice 10. Soient $x,\ y,\ z$ des nombres réels.
a) Montrer que l'on a $x^2 + y^2 \geq 2xy$. En déduire l'inégalité

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz.$$

b) Montrer que l'on a $(x+y)^2 \geq 4xy$. En déduire l'inégalité

$$|(x+y)(y+z)(x+z)| \geq 8|xyz|.$$

Prendre $x = y = -z = 1$ dans l'inégalité précédente. Commenter.

Exercice 11. Soient a et x des nombres réels. Supposons que a est non nul et que l'on a $|x-a| < |a|$. Montrer que x est non nul et que x a le signe de a.

Exercice 12. Soit x un nombre rationnel positif tel que $x^2 < 2$. Pourquoi existe-t-il un nombre rationnel y tel que $x < y$ et $y^2 < 2$? Donner explicitement un tel y (en fonction de x).

Exercice 13. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}$, dire lesquels sont majorés (minorés, bornés), et préciser l'ensemble de ses majorants et l'ensemble de ses minorants :

$$[0,1[; \qquad \mathbf{Q}_+^*; \qquad]-\infty,-1[; \qquad \{\sqrt{2}\};$$
$$]0,1[\cup[10,12]; \quad \emptyset; \quad \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 \leq 2\}; \quad \{\tfrac{1}{n}\}_{n \in \mathbf{N}^*}.$$

Exercice 14. Soient A et B deux parties de $\mathbf{R}$. On suppose que $A \subset B$ et que B est majorée. Montrer que A est majorée et que $\sup(A) \leq \sup(B)$. Donner un exemple où $A \neq B$ et où $\sup(A) = \sup(B)$.

Exercice 15. Soient X et Y deux sous-ensembles de $\mathbf{R}$. Prouver ou réfuter les implications suivantes (où $X + Y$ désigne l'ensemble des sommes $x + y$ avec $x \in X$ et $y \in Y$, et de même pour XY et $X - Y$) :

$$(X \text{ et } Y \text{ majorés}) \Longrightarrow (X \cup Y \text{ majoré})\,;$$
$$(X \text{ majoré}) \Longleftrightarrow (-X \text{ minoré})\,;(X \text{ et } Y \text{ majorés}) \Longrightarrow (X + Y \text{ majoré})\,;$$
$$(X \text{ et } Y \text{ majorés}) \Longrightarrow (XY \text{ majoré})\,;(X \text{ et } Y \text{ majorés}) \Longrightarrow (X - Y \text{ majoré})\,;$$
$$(X \text{ fini}) \Longrightarrow (X \text{ majoré})\,;(X \text{ majoré}) \Longrightarrow (\mathbf{R} \setminus X \text{ minoré})\,;(X \text{ borné}) \Longrightarrow (\mathbf{R} \setminus X \text{ non borné}).$$

Exercice 16. Pour toute partie X de $\mathbf{R}$, on notera $M(X)$ l'ensemble des majorants de X et $m(X)$ l'ensemble de ses minorants.

Pour chaque propriété ci-dessous, trouver une partie X de $\mathbf{R}$ (et si possible plusieurs) qui la vérifie, ou montrer qu'il n'en existe aucune :

$$M(X) = \emptyset \text{ et } m(X) =]-\infty, 1/2]\ ;\ M(X) = [1/2, +\infty[\text{ et } m(X) =]-\infty, 1/2]$$
$$M(X) = [0, +\infty[\text{ et } m(X) =]-\infty, 1/2]\ ;\ M(X) = \{0\}\ ;\ M(X) =]0, +\infty[$$
$$M(X) = \mathbf{R} \text{ et } m(X) = \emptyset\ ;\ M(X) = m(X)\ \ M(X) \subset m(X)$$
$$M(X) \text{ est borne}\ \ M(X) \subset \mathbf{Q}\ \ M(X) \cap m(X) \neq \emptyset$$

Exercice 17. Soit X une partie finie de $\mathbf{R}$. Montrer que X est bornée, et que si X n'est pas vide elle a un plus grand élément et un plus petit élément. (Indication : raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments de X).

Exercice 18. Soit X une partie de $\mathbf{R}$, non vide et majorée. En lui retirant un élément a, on obtient l'ensemble $X' = X \setminus \{a\}$. Cet ensemble a-t-il une borne supérieure ? Si oui, que peut-on en dire par rapport à celle de X ?

Exercice 19. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une suite (a_n) telle que $a_n \in A$ quelque soit l'entier n et $\lim a_n = \sup A$.

Exercice 20. Soit $f\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
a) Étudier le sens de variation de f.
b) Montrer que f est bornée. Dessiner le graphe de f.

Exercice 21. Soit f la fonction définie par $f(x) = x\cos(x)$. La fonction f est majorée ? Est-elle minorée ?

Exercice 22. Pour chacune des fonctions ci-dessous, on demande si l'ensemble de ses valeurs (lorsque la variable x parcourt le domaine de définition) est majoré (minoré, borné) et d'en donner le cas échéant un majorant et/ou un minorant :

$$f_1(x) = x^2 + x + 1;\quad f_2(x) = \frac{1}{1+x^2};\quad f_3(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2};$$
$$f_4(x) = \frac{x+1}{x+2};\quad f_5(x) = \sin(e^x);\quad f_6(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$$

Exercice 23. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante et soit $A = \{x \in [0,1] \ / \ x \leq f(x)\}$.
a) Montrer que A est une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$.
Notons a la borne supérieure de A.
b) Montrer que l'on a $a \in [0,1]$.
c) Montrer que $f(a)$ est un majorant de A.
d) On suppose $a = 1$. Montrer que $f(1) = 1$.
d) On suppose $a < 1$. Montrer que la nombre $f(a)$ est un minorant de $[a,1]$. En déduire que l'on a $f(a) = a$.

Exercice 24. Soit X une partie de $\mathbf{R}$. On dit que X est *dense* dans $\mathbf{R}$ si tout intervalle ouvert non vide I de $\mathbf{R}$ rencontre X (c'est-à-dire contient au moins un élément de X).

Par exemple, un résultat du cours dit que $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ sont denses dans $\mathbf{R}$.

Parmi les parties suivantes de $\mathbf{R}$, dire lesquelles sont denses :

$$\mathbf{R}; \quad \mathbf{R}_+; \quad \mathbf{R}^*; \quad \mathbf{Q}^*; \quad \mathbf{Z}; \quad \{\ln x\}_{x \in \mathbf{Q}^*}; \quad \{x \in \mathbf{R} \mid |\sin x| > 10^{-5}\}.$$