Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et l un nombre réel.
1) Les deux phrases suivantes signifient-t-elle la même chose ?

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon)$$

$$\forall\epsilon \geq 0\ \exists N\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon)$$

2) Les deux phrases suivantes signifient-t-elle la même chose ?

$$\forall M > 10\ \exists N\ (n \geq N \Rightarrow u_n \geq M)$$

$$\forall M\ \exists N\ (n \geq N \Rightarrow u_n > M)$$

3) Les deux phrases suivantes signifient-t-elle la même chose ?

$$\forall M > 10\ \exists N\ (n \geq N \Rightarrow u_n \leq M)$$

$$\forall M\ \exists N\ (n \geq N \Rightarrow u_n \leq M)$$

Exercice 2. Dessiner les ensembles suivants
$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |x - 2y| > 1\}$
$E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |x - 2| \leq 1\}$
$E_3 = \mathbb{R}_+ \times [0, 5[$

Exercice 3. Représenter $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$ dans les cas suivants ;
$E = \mathbb{R}$, $A = \{x \in E \mid x^2 - 3x + 1 < 0\}$ et $B = \{x \in E \mid x > 0\}$
$E = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1\}$.

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x = \sqrt{2-x}$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x-1} \geq x - 4$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq 2x - 3$.

Exercice 5. Écrire avec des quantificateurs les phrases suivantes.
y est le carré d'un nombre réel.
On peut trouver au moins un rationnel compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
Il existe plusieurs rationnels compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
Tout entier naturel multiple de 6 est multiple de 3.
Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors ces deux entiers sont nuls.

Exercice 6. 1) Soit a un nombre réel. On suppose que, pour tout n, on a $2 - 1/n < a < 2 + 1/n$. Que peut-on dire de a ?
2) Soit a un nombre réel. On suppose que, pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, on a $-1 - \epsilon \leq a \leq 3 - 2\epsilon$. Que peut-on dire de a ?

Exercice 7. Donner la négation des assertions suivantes :
$\forall x \in [2,3],\ x^2 - 5x + 6 \leq 0$
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad (|x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$
$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n| < M.$
$\forall (x,y,a) \in \mathbb{R}^3,\ \big((x < a\ et\ y < a) \Longrightarrow \exists z \in \mathbb{R}(z < a \text{ et } x \neq z \text{ et } y \neq z)\big)$

Exercice 8. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante :

Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $1/n$.

Écrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété.
Écrire la négation de cette formule logique.
Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (on pourra montrer que $x_n - x_0 > 1$).

Exercice 9. Soit Ω un ensemble et $A,\ B,\ C$ trois parties de Ω. Simplifier les expressions

$$E = (A \cup B) \cap ({}^cA \cup B) \cap (A \cap {}^cB) \text{ et } F = (A \cup B) \cap ({}^cA \cup B) \cap (A \cup {}^cB).$$

Parmi les propositions suivantes, prouver celles qui sont vraies donner des contre-exemples pour les autres.
(a) ${}^c(A \cup {}^cB) = {}^cA \cap B$,
(b) $(A \cup B = \Omega)$ entraîne $A \subset {}^cB$,
(d) $(A \cup B = \Omega)$ entraîne ${}^cA \subset B$,
(e) ${}^c({}^c(A \cap B)) = A \cap B$

Exercice 10. Soient $x,\ y,\ z$ des nombres réels.
a) Montrer que l'on a $x^2 + y^2 \geq 2xy$. En déduire l'inégalité

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz.$$

b) Montrer que l'on a $(x+y)^2 \geq 4xy$. En déduire l'inégalité

$$|(x+y)(y+z)(x+z)| \geq 8|xyz|.$$

Prendre $x = y = -z = 1$ dans l'inégalité précédente. Commenter.

Exercice 11. Soient a et x des nombres réels. Supposons que a est non nul et que l'on a $|x - a| < |a|$. Montrer que x est non nul et que x a le signe de a.

Exercice 12. Soit x un nombre rationnel positif tel que $x^2 < 2$. Pourquoi existe-t-il un nombre rationnel y tel que $x < y$ et $y^2 < 2$? Donner explicitement un tel y (en fonction de x).

Exercice 13. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}$, dire lesquels sont majorés (minorés, bornés), et préciser l'ensemble de ses majorants et l'ensemble de ses minorants :

$$\begin{array}{cccc} [0,1[; & \mathbf{Q}_+^*; &]-\infty,-1[; & \{\sqrt{2}\}; \\ ]0,1[\cup[10,12]; & \emptyset; & \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 \leq 2\}; & \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbf{N}^*}. \end{array}$$

Exercice 14. Soient A et B deux parties de $\mathbf{R}$. On suppose que $A \subset B$ et que B est majorée. Montrer que A est majorée et que $\sup(A) \leq \sup(B)$. Donner un exemple où $A \neq B$ et où $\sup(A) = \sup(B)$.

Exercice 15. Soient X et Y deux sous-ensembles de $\mathbf{R}$. Prouver ou réfuter les implications suivantes (où $X+Y$ désigne l'ensemble des sommes $x+y$ avec $x \in X$ et $y \in Y$, et de même pour XY et $X-Y$) :

$$(X \text{ et } Y \text{ majorés}) \Longrightarrow (X \cup Y \text{ majoré})\,;$$
$$(X \text{ majoré}) \Longleftrightarrow (-X \text{ minoré})\,;(X \text{ et } Y \text{ majorés}) \Longrightarrow (X+Y \text{ majoré})\,;$$
$$(X \text{ et } Y \text{ majorés}) \Longrightarrow (XY \text{ majoré})\,;(X \text{ et } Y \text{ majorés}) \Longrightarrow (X-Y \text{ majoré})\,;$$
$$(X \text{ fini}) \Longrightarrow (X \text{ majoré})\,;(X \text{ majoré}) \Longrightarrow (\mathbf{R} \setminus X \text{ minoré})\,;(X \text{ borné}) \Longrightarrow (\mathbf{R} \setminus X \text{ non borné}).$$