Feuille d'exercices 3

Exercice 1. Soient f une fonction définie et bornée sur $\mathbf{R}$ et g une fonction définie sur $\mathbf{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$. Montrer, en utilisant la définition, que fg tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 2. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ telle que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ et $f(x) > 0$ si $x > 0$. Montrer que $1/f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeur positive (avec la définition).

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$ tendant respectivement vers l et l' en $+\infty$. Montrer, en revenant aux définitions, que $f + 2g$ tend vers $l + 2l'$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 4. Montrer qu'une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) tendant vers $-\infty$, la suite $(f(x_n))$ tend vers $+\infty$. La fonction définie par $f(x) = x\sin(x)$ tend-elle vers $+\infty$ en $-\infty$? Vers $-\infty$?

Exercice 5. Soit A une partie de $\mathbf{R}$ et soit f une fonction réelle définie sur A. Vrai ou faux :
1) si f est croissante, elle n'est pas décroissante ;
2) si f n'est pas croissante, elle est décroissante ;
3) si f est strictement positive, alors f n'est pas négative ou nulle ;
4) si f n'est pas nulle, il existe une fonction g sur A telle que $fg = 1$;
5) f est soit strictement positive, soit strictement négative, soit nulle.

Exercice 6. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction majorée. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose

$$g(x) := \sup f(]-\infty, x[)$$

(aussi noté $\sup\limits_{y<x} f(y)$). Montrer que g est bien définie et croissante. Que vaut g si f est la fonction $x \mapsto -x^2$? Et si $f(x) = \sin x$?

Exercice 7. Soit $f : I = [0, 1] \to \mathbf{R}$ une fonction croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
1) Peut-on en déduire que $f(I) \subset I$?
2) Peut-on en déduire que $f(I) = I$? (c'est-à-dire que f « atteint toutes les valeurs dans I » ?
3) Même question en supposant f strictement croissante.
4) On suppose maintenant que f est strictement croissante et que $f(I) = I$. Montrer qu'il existe une unique fonction $g : I \to I$ telle que $g \circ f = f \circ g = Id_I$ (où Id_I désigne la fonction $x \mapsto x$ sur I). Quelle est la fonction g lorsque $f(x) = x^2$? Montrer que g est strictement croissante.

Exercice 8. Soit D un sous-ensemble de $\mathbf{R}$, et soit f une fonction réelle sur D. On suppose que D est majoré et que f est croissante. Peut-on en déduire que f est majorée ? Même question si l'on suppose que D a un plus grand élément.

Exercice 9. Soit D un sous-ensemble de $\mathbf{R}$, et soient f et g deux fonctions réelles sur D. On suppose que :
- f est strictement croissante et positive ou nulle ;
- g est croissante et strictement positive.

Montrer que fg est strictement croissante.

Exercice 10. Soient $D \subset \mathbf{R}$ un intervalle, x_0 un point de D ou l'une de ses extrémités, et f une fonction réelle sur D. Soit $R > 0$ un nombre réel. On suppose que l'on a la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < R\epsilon.$$

Montrer que f tend vers l quand x tend vers x_0.

Exercice 11. Pour chacune des deux fonctions $f : D \to \mathbf{R}$ suivantes, montrer que $\lim_a f = f(a)$ pour tout $a \in D$ (on commencera par n'utiliser que la définition d'une limite ; si possible, on pourra utiliser ensuite une autre méthode) :
1) $D = \mathbf{R}^*$, $f(x) = c/x$ ($c \in \mathbf{R}$ donné) ;
2) $D = \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$ donné) ; on pourra montrer d'abord l'identité

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k\, y^{n-1-k}.$$

Exercice 12. Soient $D \subset \mathbf{R}$ un intervalle, x_0 un point de D ou l'une de ses extrémités, et f une fonction réelle sur D. On suppose que f a une limite l en x_0.
1) Montrer que f est bornée au voisinage de x_0 (c'est-à-dire qu'il existe $r > 0$ telle que f soit bornée sur $D \cap]x_0 - r, x_0 + r[$).
2) Montrer par un exemple que la réciproque de 1) est fausse.
3) On suppose $f \geq 0$. Montrer que $l \geq 0$.
4) On suppose que f est à valeurs dans un intervalle fermé $[a, b]$ ($a \leq b$). Montrer que $l \in [a, b]$.
5) On suppose que f est à valeurs dans un intervalle ouvert $]a, b[$ ($a < b$). Que peut-on en déduire pour l ?

Exercice 13. Soient $D \subset \mathbf{R}$ un intervalle, x_0 un point de D ou l'une de ses extrémités, f et g deux fonctions sur D. On suppose que f (resp. g) a une limite l (resp. m) en x_0.
1) Si $l < m$, montrer que $f < g$ au voisinage de x_0 (on précisera le sens de cet énoncé).
2) Sans hypothèse sur l et m, on définit $h : D \to \mathbf{R}$ par $h(x) = \max(f(x), g(x))$. Montrer que $\lim_{x_0} h = \max(l, m)$.

Exercice 14. Soient $]a, b[$ un intervalle et $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ une fonction *croissante*. Montrer que f a une limite à droite et à gauche en chaque point de $]a, b[$. Montrer que f possède une limite en b si et seulement si f est majorée.

Exercice 15. Montrer que la fonction $x \mapsto |x| \sin^2 x$ est ≥ 0, n'est pas majorée, et n'a pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$.

Exercice 16. Calculer les limites suivantes (les limites à l'infini et en 0 des fonctions ln et exp sont supposées connues) :
1) $\lim_{x \longrightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x)$
2) $\lim_{x \longrightarrow +\infty} (2 \ln(x + 1) - \ln(x^2 + 1))$
3) $\lim_{x \longrightarrow 0^+} e^{1/x}$ et $\lim_{x \longrightarrow 0^-} e^{1/x}$
4) $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1+e^x}{1-e^x}$ et $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1+e^x}{1-e^x}$
5) $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$.

Exercice 17. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ sur $\mathbf{R}^*$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ mais n'a ni limite à droite, ni limite à gauche (finie ou infinie) en 0.