Corrigé de l'examen du 17 décembre

Exercice 1 N'utiliser que les définitions de la croissance d'une fonction et des limites d'une fonction en un point ou en l'infini.
1) Montrer qu'une fonction croissante sur $\mathbf{R}$ a une limite à gauche en tout point.
Soit a un point de $\mathbf{R}$. Il s'agit de montrer qu'il existe $l \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour $a - \alpha < x < a$ on ait $|f(x) - l| < \epsilon$.
Considérons l'ensemble $E_a = \{f(x) \ / \ x < a\}$. Cet ensemble est majoré par $f(a)$ car f est croissante et est non vide (il contient $f(a-1)$ par exemple) ; il admet donc une borne supérieure M. Nous allons montrer que M est la limite l recherchée.
Soit $\epsilon > 0$. Comme M est le plus petit majorant de l'ensemble E_a, $M - \epsilon$ n'est pas un majorant de E_a. Il existe donc $x_0 < a$ tel que $f(x_0) > M - \epsilon$. Pour x compris strictement entre x_0 et a on a donc $f(x) \geq f(x_0)$ (car f est croissante) et $f(x) \leq M$ (car M est un majorant de E_a). Pour $x_0 < x < a$, on a donc $M - \epsilon < f(x) \leq M$, en particulier $|f(x) - M| < \epsilon$. C'est ce que nous voulions démontrer ($\alpha = a - x_0$).
2) Montrer que si une fonction f tend vers plus l'infini en $+\infty$ alors $1/f(x)$ est défini lorsque x est assez grand et $1/f$ tend vers 0 en $+\infty$.
Soit f une fonction tendant vers plus l'infini en $+\infty$. Il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que, pour $x > A$, on ait $f(x) > 1$. Alors pour $x > A$, $f(x)$ n'est pas nul donc $1/f(x)$ est défini.
Montrons maintenant que $1/f$ tend vers vers 0 en $+\infty$. Soit $\epsilon > 0$. Comme f tend vers plus l'infini en $+\infty$, il existe $B \in \mathbf{R}$ tel que, pour $x > B$, on ait $f(x) > 1/\epsilon$. Alors pour $x > B$, on a $0 < 1/f(x) < \epsilon$.

Exercice 2
Soient trois nombres réels a, b, c. On considère la fonction polynomiale

$$g(x) = x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 + bx + c.$$

Montrer qu'elle s'annule au plus deux fois (on pourra commencer par établir que la dérivée de g est strictement croissante).
La fonction g est une fonction polynomiale. Elle est donc dérivable une infinité de fois. Calculons les dérivées première et seconde.

$$g'(x) = 4x^3 - 12ax^2 + 12a^2x + b,$$

$$g''(x) = 12x^2 - 424ax + 12a^2 = 12(x-a)^2.$$

La dérivée seconde est positive et ne s'annule qu'en un point donc g' est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. D'autre part, g' tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$. On en déduit que g' (continue) s'annule exactement une fois.
Supposons maintenant que g s'annule au moins trois fois. Soient $\alpha < \beta < \gamma$ trois nombres tels que $g(\alpha) = g(\beta) = g(\gamma) = 0$. Alors g est continue sur $[\alpha, \beta]$, dérivable sur $]\alpha, \beta[$ et $g(\alpha) = g(\beta)$; d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]\alpha, \beta[$ tel que $g'(c) = 0$. De même le théorème de Rolle appliqué à g entre β et γ assure l'existence d'un nombre $d \in]\beta, \gamma[$ tel que $g'(d) = 0$. Autrement dit, si g s'annule au moins trois fois, alors g' s'annule au moins deux fois.
Comme nous avons vu qu'ici g' ne s'annule qu'une fois, on en déduit que g s'annule au plus deux fois.
Trouver des valeurs des paramètres a, b, c telles que g s'annule une fois et une seule.
a=b=c=0

Exercice 3

1) Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$, telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}_+$. La fonction f atteint-elle nécessairement ses bornes ? La fonction f atteint-elle nécessairement l'une de ses bornes ? Justifier les réponses en donnant une démonstration ou un contre-exemple (une formule ou un dessin assez clair).

Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour $x > M$ on ait $f(x) \in [1/2, 3/2]$. Fixons un tel M. La fonction f est continue sur $[0, M]$ donc bornée sur cet intervalle : il existe $A > 0$ tel que pour $x \in [0, M]$, on ait $f(x) \in [-A, A]$. Alors pour tout $x \geq 0$, on a $-A \leq f(x) \leq \max\{A, 3/2\}$. La fonction f est donc bornée sur $\mathbf{R}_+$. La fonction f atteint sa borne inférieure sur $[0, M]$ et cette borne est inférieure ou égale à 0 puisque $f(0) = 0$. Pour $x > M$, $f(x) \geq 1/2$, on en déduit que la borne inférieure de f sur $\mathbf{R}_+$ est atteinte (en un point de $[0, M]$). La borne supérieure n'est pas nécessairement atteinte. Exemple : $f(x) = 1 - \exp(-t)$.

2) Mêmes questions pour une fonction f continue sur $\mathbf{R}_+$, telle que $f(0) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour $x > M$ on ait $f(x) \in [-1, 1]$. Fixons un tel M. La fonction f est continue sur $[0, M]$ donc bornée sur cet intervalle : il existe $A > 0$ tel que pour $x \in [0, M]$, on ait $f(x) \in [-A, A]$. Alors pour tout $x \geq 0$, on a $-\max\{A, 1/2\} \leq f(x) \leq \max\{A, 1/2\}$. La fonction f est donc bornée sur $\mathbf{R}_+$.

Supposons que f prenne une valeur positive : soit x_0 tel que $f(x_0) > 0$. Il existe M' tel que, pour $x > M'$ on ait $f(x) \leq f(x_0)/2$ (remarquer que M' est nécessairement plus grand que x_0). Sur $[0, M']$ la fonction continue f est bornée et atteint ses bornes, en particulier sa borne supérieure, qui est supérieure ou égale à $f(x_0)$. Comme pour $x > M'$, on a $f(x) \leq f(x_0)/2$, on en déduit que f atteint sa borne supérieure sur $\mathbf{R}_+$.

On montre de la même manière que si f prend une valeur négative, alors f atteint sa borne inférieure sur $\mathbf{R}_+$.

Conclusion : si f prend des valeurs positives et négatives elle atteint ses deux bornes ; si f prend une valeur positive et pas de valeur négative, elle atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure (0) ; si f prend une valeur négative et pas de valeur positive, elle atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure (0) ; si f est la fonction nulle, elle atteint ses deux bornes (0).

Exercice 4

Donner les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre et au point indiqués.

1) $\dfrac{e^x}{1+x}$ à l'ordre 5 en 0.

Il suffit de faire la division suivant les puissances croissantes de $1+x+x^2/2+x^3/6+x^4/24+x^5/120$ par $1 + x$ à l'ordre 5. On obtient :

$$\frac{e^x}{1+x} = 1 + x^2/2 - x^3/3 + 3/8x^4 - 11/30x^5 + x^5\epsilon(x).$$

2) x^x à l'ordre 4 en 1.

Écrivons $x = 1 + u$ et le développement en 0 de la fonction de u obtenue : $(1 + u)^{(1+u)} = \exp((1 + u)\ln(1 + u))$.

On connaît le développement de $\ln(1 + u)$ en 0 : $\ln(1 + u) = u - u^2/2 + u^3/3 - u^4/4 + u^4\epsilon(u)$.

On en déduit le développement de $(1+u)\ln(1+u)$: $(1+u)\ln(1+u) = u - u^2/2 + u^3/3 - u^4/4 + u^2 - u^3/2 + u^4/3 + u^4\epsilon(u) = u + u^2/2 - u^3/6 + u^4/12 + u^4\epsilon(u)$.

Puis, comme $(1 + u)\ln(1 + u)$ vaut 0 en 0, on substitue dans le développement de la fonction exponentielle et on ne garde que les termes de degrés inférieurs ou égaux à 4, on obtient : $(1+u)^{(1+u)} = 1+u+u^2/2-u^3/6+u^4/12+u^2/2+u^3/2+u^4/8-u^4/6+u^3/6+u^4/4+u^4/24+u^4\epsilon(u) = 1 + u + u^2 + u^3/2 + u^4/3 + u^4\epsilon(u)$, soit

$$(1 + u)^{(1+u)} = 1 + u + u^2 + u^3/2 + u^4/3 + u^4\epsilon(u)$$

3) $\ln x$ à l'ordre 3 en 2.

$$\ln(2+x) = \ln 2 + \ln(1+x/2) = \ln 2 + x/2 - x^2/8 + x^3/24 + x^3\epsilon(x).$$

4) $\dfrac{\sin x}{\cos(\ln(1+x))}$ à l'ordre 5 en 0 (écrire auparavant les termes de degré inférieur ou égal à 5 de $(x+ax^2+bx^3+cx^4+dx^5)^4$).
$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 + x^5\epsilon(x)$

$$\begin{aligned}
\cos(\ln(1+x)) &= 1-(x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+x^5/5)^2/2 \\
&\quad +(x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+x^5/5)^4/24 + x^5\epsilon(x) \\
&= 1-x^2/2-x^4/8+x^3/2-x^4/3+x^5/4+x^5/6+x^4/24-x^5/12+x^5\epsilon(x) \\
&= 1-x^2/2+x^3/2-5x^4/12+x^5/3+x^5\epsilon(x).
\end{aligned}$$

On divise suivant les puissances croissantes le développement de sin par le développement obtenu et on obtient
$$\frac{\sin x}{\cos(\ln(1+x))} = x + x^3/3 - x^4/2 + 71x^5/120 + x^5\epsilon(x).$$

Exercice 5
1) Calculer la limite de la suite $(\cosh(1/n))^n$.

$$\begin{aligned}
(\cosh(1/n))^n &= \exp(n\ln((\cosh(1/n))\exp(n\ln(1+n^{-2}/2+n^{-2}\epsilon(1/n))) \\
&= \exp(n(n^{-2}/2+n^{-2}\epsilon(1/n))) = \exp((n^{-1}/2+n^{-1}\epsilon(1/n)))
\end{aligned}$$

La suite converge donc vers 1.
2) Calculer la limite en 0 de la fonction $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\sinh^2 x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x} &= \frac{\sinh^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \sinh^2 x} \\
&= \frac{2x^4/3 + x^4\epsilon(x)}{x^4 + x^4\epsilon(x)}
\end{aligned}$$

La fonction a $2/3$ pour limite en 0.
3) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(1+1/n)}{(n+\sin n)}$.

$$\frac{\ln(1+1/n)}{(n+\sin n)} \leq \frac{1/n}{(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}$$

La série est donc à termes positifs majorés par $\frac{1}{n(n-1)}$ terme général d'une série convergente. La série à étudier est convergente.
Exercice 6
On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \cos n$.
1) La suite (u_n) est-elle bornée ?
La suite est majorée en valeur absolue par 1. Elle est donc bornée.
2) Montrer qu'un nombre α n'appartenant pas à $[-1,1]$ n'est pas valeur d'adhérence de la suite

(u_n).
Si $|\alpha| > 1$ alors pour tout n, on a $|u_n - \alpha| \geq |\alpha| - 1 > 0$. Le nombre α n'est donc pas valeur d'adhérence de la suite.
3) Donner deux caractérisations de la densité d'un ensemble dans $\mathbf{R}$ (l'une faisant appel à la notion d'intervalle ouvert, l'autre aux suites).
Une partie E de $\mathbf{R}$ est dense dans $\mathbf{R}$ si tout intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ contient au moins un point de E. Une partie E de $\mathbf{R}$ est dense dans $\mathbf{R}$ si tout point x de $\mathbf{R}$ est limite d'une suite composée de nombres appartenant à E.
On admet que l'ensemble $\{p + 2\pi q \ / \ p, q \in \mathbf{Z}\}$ est dense dans R.
4) Soit $\beta \in [-1, 1]$. Pourquoi existe-t-il des suites d'entiers p_n, q_n telles que $p_n + 2q_n\pi$ converge vers $\arccos\beta$? Parce que $\{p + 2\pi q \ / \ p, q \in \mathbf{Z}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$. En déduire que β est valeur d'adhérence de la suite (u_n). Prenons des suites d'entiers p_n, q_n telles que $p_n + 2q_n\pi$ converge vers $\arccos\beta$. Alors, comme la fonction cos est continue, $\cos(p_n + 2q_n\pi)$ converge vers $\cos(\arccos\beta) = \beta$. Mais $\cos(p_n + 2q_n\pi) = \cos(p_n)$, on en déduit que (u_{p_n}) converge vers β. Autrement dit, β est valeur d'adhérence de (u_n). Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) ? [-1,1]. La suite (u_n) est croissante ? Non. Une suite croissante ne peut avoir deux valeurs d'adhérence. Est-elle convergente ? Non. Une suite convergente a sa limite pour unique valeur d'adhérence.