DS3

(20 novembre 2009, durée 1h)

Exercice 1. (2 points)
Montrer, en revenant aux définitions, que si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$$

alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = +\infty.$$

Il s'agit de démontrer que

$$\forall A \in \mathbf{R} \quad \exists M \in \mathbf{R} \quad (x \geq M \Rightarrow f(x) - g(x) \geq A).$$

Soit $A \in \mathbf{R}$. Comme $g(x)$ tend vers 3 en $+\infty$, il existe L tel que pour $x \geq L$ on ait $2 < g(x) < 4$. Prenons un tel L.
Comme $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ il existe R tel que, pour $x \geq R$, on ait $f(x) > A+4$. Prenons un tel R.
Posons $M = \max(R, L)$. Alors pour $x \geq M$ on a

$$f(x) - g(x) \geq A + 4 - 4 = A.$$

Exercice 2. (3 points)
Soit f une fonction définie continue sur $\mathbf{R}$ telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi$. Montrer que f est majorée. Atteint-elle nécessairement sa borne supérieure ?
Comme f tend vers π en $+\infty$ il existe L tel pour $x \geq L$ on ait $\pi - 1 < f(x) < \pi + 1$. Prenons un tel L. Comme f tend vers $-\infty$ en $-\infty$, il existe M tel que pour $x \leq M$ on ait $f(x) < 0$. Prenons un tel M. On a nécessairement $M < L$ car $\pi - 1 > 0$. La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$ donc sur $[M, L]$. Or une fonction continue sur un segment est bornée sur ce segment. Il existe donc $A > 0$ tel que, pour tout $x \in [M, L]$, on ait $|f(x)| < A$. Prenons un tel A. Pour tout x dans $\mathbf{R}$, on a alors $f(x) \leq \max(\pi + 1, A)$.

Exercice 3. (4 points)
Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que $f(q) = g(q)$ pour tout nombre rationnel q.
1) Soit $x \in \mathbf{R}$. Que signifie f continue en x, g continue en x (donner la définition (ϵ,...)) ?

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad (|y - x| < \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon).$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad (|y - x| < \alpha \Rightarrow |g(y) - g(x)| < \epsilon).$$

2) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbf{Q}$ tel que

$$|f(x) - f(q)| < \epsilon/2 \qquad |g(x) - g(q)| < \epsilon/2.$$

Soit α_1 tel que, pour $|y - x| < \alpha_1$, on ait $|f(y) - f(x)| < \epsilon/2$. Soit α_2 tel que, pour $|y - x| < \alpha_2$, on ait $|g(y) - g(x)| < \epsilon/2$. Prenons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Comme $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$ il existe $q \in]x - \alpha, x + \alpha[\cap \mathbf{Q}$. Pour un tel rationnel q on a

$$|f(x) - f(q)| < \epsilon/2 \qquad |g(x) - g(q)| < \epsilon/2.$$

En déduire $|f(x) - g(x)| < \epsilon$.

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(q)| + |f(q) - g(q)| + |g(q) - g(x)|$$

Or par hypothèse on a $|f(q)-g(q)| = 0$ et par choix de q, $|f(x)-f(q)| < \epsilon/2$ et $|g(q)-g(x)| < \epsilon/2$. On en déduit $|f(x) - g(x)| < \epsilon$.

3) Qu'en déduit-on pour f et g ?

Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $\epsilon > 0$, on a $|f(x) - g(x)| < \epsilon$. Cela signifie que $|f(x) - g(x)|$ est nul c'est-à-dire que $f(x) = g(x)$. Ceci étant vrai pour n'importe quel x, f et g sont égales.

Exercice 4. (5 points)
Vrai ou faux ? Si l'affirmation est vraie en donner une démonstration, si elle est fausse donner un contre exemple.

1) Si f est une fonction définie sur $[0, \infty[$ croissante et majorée alors elle est bornée.

Vrai. Soit M un majorant. Soit $x \in \mathbf{R}_+$, on a $f(0) \leq f(x) \leq M$.

2) Soit f une fonction définie sur $]0, 1]$ continue bornée sur $]0, 1]$ alors f atteint sa borne supérieure ou sa borne inférieure.

Faux. Exemple : $f(x) = (1 - x)\sin(1/x)$.

3) Si f est continue sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

Faux. Exemple : $f = \sin$, $a = 0$, $b = 2\pi$.

4) Si f définie sur $\mathbf{R}$ croissante sur $\mathbf{R}$ n'est pas continue alors elle n'est pas surjective sur $\mathbf{R}$. (On rappelle qu'une fonction croissante sur $\mathbf{R}$ a une limite à droite et une limite à gauche en chaque point, les discontinuités d'une fonction croissante ont donc une forme particulière).

Vrai. Soit a un point où f n'est pas continue. Alors on a

$$\lim_{x\to a, x<a} f(x) < \lim_{x\to a, x>a} f(x).$$

Prenons y un point dans l'intervalle $]\lim_{x\to a,x<a} f(x), \lim_{x\to a,x>a} f(x)[$ qui soit différent de $f(a)$. Alors comme f est croissante, pour $x < a$, on a $f(x) \leq \lim_{x\to a,x<a} f(x) < y$ et, pour $x > a$, on a $f(x) \geq \lim_{x\to a,x>a} f(x) > y$. Comme on a pris $y \neq f(a)$, on a donc trouvé un nombre y, qui n'a aucun antécédent par f.

Exercice 5. (3 points)
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\ln\left(\sqrt{x + \exp(x^4)}\right), \quad \frac{1 + \exp(x)}{2 + \cos(x)}, \quad \ln(1 + x^{1/3})\sqrt{1 + x}.$$

Exercice 6. (3 points)
Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{\sinh n}{e^n}.$$

On a $|\frac{\sin n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$. Or la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente. On en déduit que la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^2}$$

est absolument convergente donc convergente.

On a

$$\lim \frac{\sinh n}{e^n} = \lim \frac{e^n + e^{-n}}{2e^n} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

La deuxième série est donc divergente.