DS2

(23 octobre 2009, durée 1h)

Questions de cours
1) Soit $a \in \mathbf{R}$. Montrer (avec les epsilon) que si $f(x)$ est bornée et si $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a, alors $f(x)g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a.
On veut montrer :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ (|x-a| < \alpha\ \Rightarrow\ |f(x)g(x)| < \epsilon).$$

(LA DÉMONSTRATION COMMENCE PAR (MAIS FAUT-IL LE RÉPÉTER ?))
Soit $\epsilon > 0$.
Comme f est bornée, il existe $M > 0$ tel que, pour tout x on ait, $|f(x)| \leq M$. Prenons un tel M.
Comme g tend vers 0 en a, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $|x-a| < \alpha$, on ait $|g(x)| < \epsilon/M$. Prenons un tel α.
Alors, pour $|x-a| < \alpha$, on a

$$|f(x)g(x)| \leq M\epsilon/M = \epsilon.$$

2) Montrer (avec les epsilon) que si $f(x)$ tend vers l et $g(x)$ tend vers l' quand x tend vers a alors $2f(x) - g(x)$ tend vers $2l - l'$.
On veut montrer :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ (|x-a| < \alpha\ \Rightarrow\ |2f(x) - g(x) - (2l - l')| < \epsilon).$$

(LA DÉMONSTRATION COMMENCE PAR (MAIS FAUT-IL LE RÉPÉTER ?))
Soit $\epsilon > 0$.
Prenons $\alpha_1 > 0$ tel que, pour $|x-a| < \alpha_1$, on ait $|f(x) - l| < \epsilon/4$ (c'est possible car f tend vers l en a).
Prenons $\alpha_2 > 0$ tel que, pour $|x-a| < \alpha_2$, on ait $|g(x) - l'| < \epsilon/4$ (c'est possible car g tend vers l' en a).
Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Alors, pour $|x-a| < \alpha$, on a

$$|2f(x) - g(x) - (2l - l')| \leq 2|f(x) - l| + |g(x) - l'| < 2\epsilon/4 + \epsilon/4 = 3\epsilon/4 < \epsilon.$$

Exercice 1. 1) Donner la définition d'un ensemble dense dans $\mathbf{R}$.
Un ensemble E est dense dans $\mathbf{R}$ si, pour tous réels x, y avec $x < y$, il existe une élément e de E tel que $x < e < y$.
2) Montrer que $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$.
(LA DÉMONSTRATION COMMENCE PAR (MAIS FAUT-IL LE RÉPÉTER ?))
Soient x et y deux réels tels que $x < y$.
Si $0 \leq x < y$, prenons k un entier tel que $k > \sqrt{2}/(y-x)$ (un tel k existe car $\mathbf{R}$ est archimédien). Alors, comme $\sqrt{2}/k < y - x$, il existe un entier $n > 0$ tel que $x < n\sqrt{2}/k < y$ et $n\sqrt{2}/k$ n'est pas rationnel.
Si $x < y \leq 0$ alors $0 \leq -y < -x$. D'après le cas précédent, il existe un nombre irrationnel z tel que $-y < z < -x$. Mais alors $-z$ est aussi irrationnel et $x < -z < y$.
Si $x < 0 < y$, prenons k tel que $k > \sqrt{2}/y$. Alors $x < \sqrt{2}/k < y$ et $\sqrt{2}/k$ est irrationnel.
Dans tous les cas, il existe un élément e de $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ tel que $x < e < y$.
3) Quelle est la borne inférieure de l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{R}\ /\ x \geq 1, x \notin \mathbf{Q}\}\ ?$$

Justifier.
Les éléments de l'ensemble sont tous minorés par 1 donc la borne inférieure de l'ensemble est supérieure ou égale à 1. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$, il existe z un nombre irrationnel tel que, $1 < z < 1 + \epsilon$. Le nombre $1 + \epsilon$ n'est donc pas un minorant de l'ensemble. Comme c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$, cela montre que la borne inférieure de l'ensemble est inférieure ou égale à 1, d'où

$$\inf\{x \in \mathbf{R} \ / \ x \geq 1, x \notin \mathbf{Q}\} = 1.$$

Cet ensemble a-t-il un plus petit élément ?
Si un ensemble a un plus petit élément alors cet élément est aussi sa borne inférieure. Or ici 1 la borne inférieure de $\{x \in \mathbf{R} \ / \ x \geq 1, x \notin \mathbf{Q}\}$ n'appartient pas à l'ensemble (1 est rationnel) donc $\{x \in \mathbf{R} \ / \ x \geq 1, x \notin \mathbf{Q}\}$ n'a pas de plus petit élément.

Exercice 2. Soit f une fonction **strictement** décroissante définie sur $\mathbf{R}$. On suppose que f n'est pas majorée et qu'elle est minorée.
1) Que signifie f strictement décroissante ?
$x < y \ \Rightarrow \ f(x) > f(y)$.
2) Que signifie f non majorée ?
$\forall M \in \mathbf{R} \ \exists x \ f(x) > M$.
3) Donner la définition de : "f tend vers $+\infty$ en $-\infty$".
$\forall M \ \exists L \ (x < L \ \Rightarrow \ f(x) > M$.
4) Montrer que f tend vers $+\infty$ en $-\infty$.
(LA DÉMONSTRATION COMMENCE PAR (MAIS FAUT-IL LE RÉPÉTER ?))
Soit M.
Prenons $L \in \mathbf{R}$ tel que $f(L) > M$ (un tel L existe (2)). Alors pour $x < L$ on a $f(x) > f(L) > M$.
5) La fonction f atteint-elle sa borne inférieure ?
Non. Supposons que ce soit le cas. Alors il existe x avec $f(x) = \inf_{\mathbf{R}} f$. Mais f est strictement décroissante, donc pour $y > x$ on a $f(y) < \inf_{\mathbf{R}} f = f(x)$. Contradiction.

Exercice 3. Vrai ou faux ? Si l'énoncé est vrai, donner une démonstration ; s'il est faux, donner un contre-exemple.
1) Si f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ alors pour a assez grand f est décroissante sur l'intervalle $[a, +\infty[$.
FAUX. La fonction peut tendre vers l'infini avec des oscillations. Exemple : $f(x) = 5\cos(x) - x$.
2) Si une partie de $\mathbf{R}$ est dense dans $\mathbf{R}$ alors elle n'est pas majorée.
VRAI. Il suffit de montrer qu'une partie majorée N'EST PAS dense dans $\mathbf{R}$. Soit E une partie majorée de $\mathbf{R}$. Soit M tel que tout élément e de E soit inférieur à M. Alors il n'existe pas d'élément de E compris entre $M + 1$ et $M + 2$. Donc E n'est pas dense dans $\mathbf{R}$.
3) Si f tend vers $+\infty$ en 0 et g est minorée alors $f - g$ tend vers $+\infty$ en 0.
FAUX. Exemple : sur $\mathbf{R}_+^*$, $f(x) = g(x) = 1/x$.
4) Si f est définie sur $\mathbf{R}$ strictement positive sur $\mathbf{R}$ alors, pour tout x, on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que $f(x) > \epsilon$.
VRAI. Pour tout x, $f(x) > f(x)/3 > 0$. Mais on ne peut pas affirmer l'existence de $\epsilon > 0$ tel que, pour tout x, $f(x) > \epsilon$.

Exercice 4. Étudier la convergence de la série de terme général

$$\frac{\sin(1-n)}{2^n}.$$

On a

$$|\frac{\sin(1-n)}{2^n}| \leq 1/2^n.$$

Or la série de terme général $1/2^n$ est convergente, donc la série de terme général $\frac{\sin(1-n)}{2^n}$ est absolument convergente donc convergente.