DS1

(10 octobre 2008, durée 1h)

Questions de cours

1) Donner les définitions de la limite d'une suite, d'une valeur d'adhérence d'une suite (avec les ϵ).

Un nombre l est limite d'une suite (u_n) si :

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |u_n - l| < \epsilon.$$

Un nombre a est valeur d'adhérence d'une suite (u_n) si :

$$\forall \epsilon > 0 \forall N \exists n \geq N |u_n - a| < \epsilon.$$

2) Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E sur l'ensemble des parties de E .

Supposons qu'une surjection $\phi : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ existe. Considérons alors la partie A de E défini par

$$A = \{x \in E / x \notin \phi(x)\}$$

L'application ϕ étant surjective, il existe $a \in E$ tel que $A = \phi(a)$. Alors si $a \in \phi(a)$, $a \notin A$ (par définition de A), i.e. $a \notin \phi(a)$ (car $A = \phi(a)$); et si $a \notin \phi(a)$, $a \in A$ (par définition de A), i.e. $a \in \phi(a)$. La supposition faite est donc absurde.

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$. On suppose que $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers l et l' quand x tend vers a . Montrer **en utilisant la définition** que $f(x) - g(x)$ tend vers $l - l'$ lorsque x tend vers a .

Soit $\epsilon > 0$. Comme $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a , il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $|x - a| < \alpha$, on a $|f(x) - l| < \epsilon/2$. Fixons un tel α . Comme $g(x)$ tend vers l' quand x tend vers a , il existe $\alpha' > 0$ tel que, pour $|x - a| < \alpha'$, on a $|g(x) - l'| < \epsilon/2$. Fixons un tel α' . Alors si $|x - a| < \min\{\alpha, \alpha'\}$, on a

$$|f(x) - g(x) - (l - l')| \leq |f(x) - l| + |g(x) - l'| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Conclusion : pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un nombre $\alpha'' > 0$ tel que, pour $|x - a| < \alpha''$, on ait $|f(x) - g(x) - (l - l')| < \epsilon$. C'est exactement dire que $f(x) - g(x)$ tend vers $l - l'$ lorsque x tend vers a .

Exercice 2. On considère l'ensemble

$$E = \{n + p2^{1/3} / n \in \mathbf{Z}, p \in \mathbf{Z}\}.$$

1) Montrer que la racine cubique de 2 n'est pas rationnelle.

Supposons que $2^{1/3}$ soit rationnelle. Alors il existe p et q deux nombres entiers premiers entre eux tels que $2^{1/3} = p/q$. On a alors $2q^3 = p^3$. On en déduit que 2 divise p i.e. qu'on peut écrire $2p'$. On a alors $2q^3 = 2^3p'^3$ soit $q^3 = 4p'^2$. Le nombre q est donc pair lui aussi. Contradiction car on avait supposé que p et q étaient premiers entre eux.

2) Montrer que si e appartient à E alors tous les multiples entiers de e appartiennent aussi à E .

Si e appartient à E alors il existe n, p deux entiers tels que $e = n + p2^{1/3}$. Donc $ke = kn + kp2^{1/3}$ appartient à E puisqu'il s'écrit comme une somme d'un entier (kn) et d'un multiple entier de $2^{1/3}$.

3) Montrer que si e et f appartiennent à E alors $e - f$ aussi.

Si e et f appartiennent à E alors il existe n, p, n', p' des entiers tels que $e = n + p2^{1/3}$ et $f = n' + p'2^{1/3}$. On a donc $e - f = (n - n') + (p - p')2^{1/3}$. C'est bien un élément de E .

4) Montrer que $E \cap \mathbf{R}_+^*$ est non vide minorée.

Tous les éléments de $E \cap \mathbf{R}_+^*$ sont positifs et 1 appartient à $E \cap \mathbf{R}_+^*$.

On appelle s la borne inférieure de $E \cap \mathbf{R}_+^*$.

5) Supposons que s soit strictement positif. Existe-t-il un élément dans $E \cap \mathbf{R}_+^*$ strictement inférieur à $3s/2$? Pourquoi? **Admettons que s n'appartient pas à $E \cap \mathbf{R}_+^*$** (on peut le démontrer). Existe-t-il deux éléments dans $E \cap \mathbf{R}_+^*$ strictement inférieurs à $3s/2$? Pourquoi?

Comme $3s/2$ est strictement supérieur à s la borne inférieure de $E \cap \mathbf{R}_+^*$, ce n'est pas un minorant de $E \cap \mathbf{R}_+^*$. Il existe donc un élément de $E \cap \mathbf{R}_+^*$ qui est strictement inférieur à $3s/2$. Soit s' un tel élément. Puisque s n'appartient pas à $E \cap \mathbf{R}_+^*$, s' est différent de s , donc supérieur strictement à s (qui est un minorant de $E \cap \mathbf{R}_+^*$). Mais alors s' n'est pas un minorant de $E \cap \mathbf{R}_+^*$ puisque s est le plus grand des minorants de $E \cap \mathbf{R}_+^*$. Il existe donc s'' dans $E \cap \mathbf{R}_+^*$ tel que $s < s'' < s' < 3s/2$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

6) Dédire des questions 3) et 5) que l'hypothèse $s > 0$ est absurde.

D'après 3) la différence $s' - s''$ appartient à $E \cap \mathbf{R}_+^*$. Mais on a aussi $0 < s' - s'' < 3s/2 - s = s/2 < s$. C'est en contradiction avec le fait que s est un minorant de $E \cap \mathbf{R}_+^*$.

7) On a donc $s = 0$. En déduire que $E \cap \mathbf{R}_+^*$ est dense dans $\mathbf{R}_+$ (*i.e.* que tout intervalle ouvert non vide contenu dans $\mathbf{R}_+$ contient au moins un point de $E \cap \mathbf{R}_+^*$) (utiliser le 2)).

La borne inférieure de $E \cap \mathbf{R}_+^*$ est 0, donc il existe dans $E \cap \mathbf{R}_+^*$ des éléments inférieurs à tout nombre strictement positif fixé. Soit $0 \leq x < y$ deux nombres définissant un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}_+$. Considérons un élément e dans $E \cap \mathbf{R}_+^*$, strictement inférieur à $y - x$ (on a vu qu'il en existait). Alors $(E(x/e) + 1)e$ appartient à l'intervalle $]x, y[$.

8) Montrer que la borne inférieure de l'ensemble $E \cap]\pi, +\infty[$ est π .

Le nombre π est un minorant de $E \cap]\pi, +\infty[$. D'autre part, pour tout nombre y supérieur à π , il existe un élément e de E compris entre π et y (d'après la question 7). Cela signifie que y n'est pas un minorant de $E \cap]\pi, +\infty[$. Autrement dit π est le plus grand des minorants de $E \cap]\pi, +\infty[$ c'est-à-dire sa borne inférieure.

Exercice 3. La fonction définie sur $\mathbf{R}_+$

$$f(x) = x(1 - \cos(2x^2))$$

est-elle majorée sur $\mathbf{R}_+$? Minorée sur $\mathbf{R}_+$? Justifier en revenant aux définitions.

La fonction cosinus est majorée par 1 donc $1 - \cos(2x^2) \geq 0$ et, pour tout $x \geq 0$, $x(1 - \cos(2x^2)) \geq 0$. La fonction f est donc minorée par 0 sur $\mathbf{R}_+$.

Si x est tel qu'il existe un entier k tel que $2x^2 = \pi/2 + 2k\pi$ alors $f(x) = x$. Pour tout k entier positif, on a $f(\sqrt{\pi/4 + k\pi}) = \sqrt{\pi/4 + k\pi}$. Lorsque k tend vers plus l'infini (dans $\mathbf{Z}$) $f(\sqrt{\pi/4 + k\pi})$ tend vers plus l'infini. La fonction f n'est donc pas majorée.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbf{R}$ les inéquations suivantes :

$$\sqrt{x^4 - 1} \leq x^2 - 1; \quad 2|x - 1| < \left| \frac{1}{x} + 1 \right| - 2.$$

Pour que $\sqrt{x^4 - 1}$ soit défini il faut que $x^4 - 1$ soit ≥ 0 *i.e.* que $|x| \geq 1$. Lorsque c'est le cas les deux termes de l'inégalité sont positifs, l'inégalité est donc équivalente à l'inégalité obtenue en mettant les deux termes au carré *i.e.* $x^4 - 1 \leq (x^2 - 1)^2$ soit $2(x^2 - 1) \leq 0$. Les solutions sont donc les nombres x de valeurs absolues ≥ 1 tels que $x^2 - 1 \leq 0$ *i.e.* 1 et -1.

La deuxième inégalité n'a de sens que pour $x \neq 0$. La valeur absolue $|x - 1|$ vaut $x - 1$ si $x \geq 1$, $1 - x$ si $x < 1$. La valeur absolue $|\frac{1}{x} + 1|$ vaut $\frac{1}{x} + 1$ si $\frac{1}{x} + 1 \geq 0$ *i.e.* $\frac{1}{x} \geq -1$ *i.e.* $x > 0$ ou $x \leq -1$.

Pour $x \geq 1$, l'inégalité équivaut à $2(x - 1) < \frac{1}{x} - 1$ *i.e.* $2x < \frac{1}{x} + 1$: aucun point ≥ 1 ne satisfait cette inégalité.

Si $0 < x < 1$, l'inégalité est équivalente à $2 - 2x < \frac{1}{x} + 1 - 2$ *i.e.* $3 - 2x - 1/x < 0$ ou encore $2x^2 - 3x + 1 > 0$ (en multipliant par $x > 0$) soit $(x - 1)(2x - 1) > 0$. Comme $x < 1$ cela revient à dire qu'il faut que x soit inférieur à $1/2$.

Si $x \leq -1$, l'inégalité est équivalente à $2 - 2x < \frac{1}{x} + 1 - 2$ *i.e.* $3 - 2x - 1/x < 0$ ou encore $2x^2 - 3x + 1 < 0$ (en multipliant par $x < 0$) soit $(x - 1)(2x - 1) < 0$, ce qui n'est pas vérifié si $x \leq -1$.

Si $-1 < x < 0$, l'inégalité est équivalente à $2 - 2x < -\frac{1}{x} - 1 - 2$ *i.e.* $5 - 2x + 1/x < 0$ ou encore $2x^2 - 5x - 1 < 0$ (en multipliant par $x < 0$). Ceci est vérifié pour x compris entre $(5 - \sqrt{33})/4$ et $(5 + \sqrt{33})/4$.

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'inégalité est $] (5 - \sqrt{33})/4, 0 [\cup] 0, 1/2 [$.

Exercice 5. Étudier la convergence des séries de termes généraux

$$\frac{1 + 2^n}{3 + 3^n}; \quad 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

La première série est à termes positifs. Le rapport de deux termes successifs tend vers $2/3$ donc le critère de d'Alembert assure que la série converge. Le terme général de la deuxième série ne converge pas vers 0 (il converge vers 1). La deuxième série diverge donc (grossièrement).

Exercice 6. Donner un exemple de suite ayant quatre valeurs d'adhérences (ou plus).

La suite des nombres rationnels a tous les nombres réels pour valeurs d'adhérence.