

DS1

(30 septembre 2009, durée 1h)

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que la fonction $f + g$ est bornée et que l'on a l'encadrement suivant :

$$\sup(f) + \inf(g) \leq \sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g).$$

Les bornes inférieures $\inf(f)$ et $\inf(g)$ sont des minorants de f et g respectivement. Pour tout x , on a donc

$$f(x) \geq \inf(f) \quad g(x) \geq \inf(g)$$

On en déduit

$$f(x) + g(x) \geq \inf(f) + g(x) \geq \inf(f) + \inf(g).$$

Les bornes supérieures $\sup(f)$ et $\sup(g)$ sont des majorants de f et g respectivement. Pour tout x , on a donc

$$f(x) \leq \sup(f) \quad g(x) \leq \sup(g)$$

On en déduit

$$f(x) + g(x) \leq \sup(f) + g(x) \leq \sup(f) + \sup(g).$$

La fonction $f + g$ est donc minorée et majorée, *i.e.* bornée. D'autre part comme $\sup(f + g)$ est le plus petit des majorants de $f + g$ et que nous venons de voir que $\sup(f) + \sup(g)$ est un majorant de $f + g$, on a

$$\sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g).$$

Pour tout x , de $g(x) \geq \inf(g)$ on déduit $f(x) + g(x) \geq f(x) + \inf(g)$. Or, si une fonction est inférieure ou égale à une autre, la borne supérieure de la première est inférieure à celle de la deuxième. On a donc

$$\sup(f + g) \geq \sup(f(x) + \inf(g)) = \sup(f) + \inf(g).$$

Exercice 2. 1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite à valeurs réelles et l un nombre réel. Écrire la définition de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vers l .

Un nombre l est limite d'une suite (u_n) si :

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |u_n - l| < \epsilon.$$

2) On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers un nombre réel l différent de 0. Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n| \leq 2|l|$.

Si $l \neq 0$ alors $|l| > 0$. D'après la définition donnée en 1), il existe N tel que pour $n \geq N$ on ait

$$|u_n - l| < |l|.$$

On a alors, pour $n \geq N$,

$$|u_n| \leq |u_n - l| + |l| \leq |l| + |l| = 2|l|.$$

Est-ce encore vrai si $l = 0$?

Non. Par exemple la suite $(1/n)_n$ tend vers 0 mais n'est pas nulle à partir d'un certain rang.

$$|x - 3| < |x + 1| - 1.$$

Considérons trois cas.

$-1 < x < 3$. Alors l'inéquation s'écrit : $3 - x < x + 1 - 1$ soit $2x > 3$ ou $x > 3/2$. Les éléments de $]3/2, 3[$ sont solutions de l'inéquation.

$x \geq 3$. Alors l'inéquation s'écrit : $x - 3 < x + 1 - 1$ soit $-3 < 0$ ce qui est vrai. Les éléments de $[3, +\infty[$ sont solutions de l'inéquation.

Exercice 4. 1) Montrer que si le carré d'un nombre entier p est multiple de 3 alors le nombre p lui-même est multiple de 3.

Il suffit de montrer que si un nombre n'est pas multiple de 3 alors son carré ne l'est pas non plus. Soit n un nombre qui n'est pas multiple de 3. Alors il s'écrit $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$ avec k entier.

Si $n = 3k + 1$ alors $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ n'est pas multiple de 3.

Si $n = 3k + 2$ alors $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ n'est pas multiple de 3.

2) Montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.

Supposons que $\sqrt{3}$ le soit. Alors on peut écrire $\sqrt{3} = p/q$ avec p et q entiers premiers entre eux, $q \neq 0$. En portant cette égalité au carré on obtient $3 = p^2/q^2$ soit $p^2 = 3q^2$. En particulier p^2 est un multiple de 3. D'après la première question, on en déduit que p lui-même est multiple de 3. Il existe p' entier tel que $p = 3p'$. L'égalité $p^2 = 3q^2$ devient $9p'^2 = 3q^2$ ou encore $3p'^2 = q^2$. Le carré q^2 est donc multiple de 3 et, toujours d'après la première question, q est multiple de 3. Finalement p et q sont tous les deux divisibles par 3. Contradiction car ils sont premiers entre eux par hypothèse.

$$A = \{x \in \mathbf{D} \mid \frac{1}{7} \leq x\}.$$

1) Donner le développement décimal de $\frac{1}{7}$. Le nombre $\frac{1}{7}$ appartient-il à A ?

On obtient le développement décimal de $1/7$ en faisant des divisions comme on sait les faire depuis longtemps. Cela donne $1/7 = 0,142857142857142857142\ldots$: les chiffres 142857 se répètent indéfiniment. Le nombre $1/7$ n'est pas décimal (car 7 divise le dénominateur de l'écriture irréductible de la fraction, car le développement décimal ne se termine pas par des 0 ou des 9) donc $1/7$ n'appartient pas A .

2) Quelle est la borne inférieure de A ? L'ensemble A a-t-il un plus petit élément? Justifier.

Par définition $1/7$ est un minorant de l'ensemble A . La borne inférieure de A est donc supérieure ou égale à $1/7$ (car la borne inférieure de A est le plus grand des minorants de A). Soit x un nombre plus grand que $1/7$. Il existe l tel que $x - 1/7 > 10^{-l}$ car la suite $(10^{-l})_l$ tend vers 0. Prenons un tel l . Alors $1/7 + 10^{-l} < x$. Autrement dit on peut ajouter 1 au l ème chiffre du développement décimal de $1/7$ en restant inférieur à x . Le nombre **décimal** obtenu en ajoutant 1 au l ème chiffre du développement décimal de $1/7$ et en remplaçant tous les chiffres à partir du $(l+1)$ ème par 0 est un nombre à la fois supérieur à $1/7$ et inférieur à x . Cela signifie que ce nombre est un élément de A inférieur à x , donc que x n'est pas un minorant de A . En conclusion, $1/7$ est un minorant de A et tous les nombres supérieurs à $1/7$ ne sont pas des minorants de A . C'est dire que $1/7$ est le plus grand des minorants de A , sa borne inférieure. La borne inférieure de A n'appartient pas à A donc A n'a pas de plus petit élément.