DS1

(17 octobre 2008, durée 1h)

Questions de cours

1) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Soient I un intervalle, f une fonction définie et continue sur I, a et b ($a < b$) deux éléments distincts de I. Alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$), il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

2) Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E sur l'ensemble des parties de E.

Supposons qu'une surjection $\phi : E \to \mathcal{P}(E)$ existe. Considérons alors la partie A de E défini par

$$A = \{x \in E \;/\; x \notin \phi(x)\}$$

L'application ϕ étant surjective, il existe $a \in E$ tel que $A = \phi(a)$. Alors si $a \in \phi(a)$, $a \notin A$ (par définition de A), *i.e.* $a \notin \phi(a)$ (car $A = \phi(a)$) ; et si $a \notin \phi(a)$, $a \in A$ (par définition de A), *i.e.* $a \in \phi(a)$. La supposition faite est donc absurde.

3) Montrer qu'une fonction croissante bornée sur $\mathbf{R}$ a une limite en plus l'infini.

La fonction est majorée par hypothèse. Elle admet donc une borne supérieure. Notons la l : $l = \sup_{\mathbf{R}} f$. Par définition, l est le plus petit des majorants de f. En particulier, c'est un majorant : pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) \leq l$. Soit $\epsilon > 0$. Comme l est le plus petit des majorants, $l - \epsilon$ n'est pas un majorant de f. Il existe donc $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) > l - \epsilon$. La fonction f est supposée croissante donc, pour $x > x_0$, on a $f(x) \geq f(x_0) > l - \epsilon$. Finalement, on a montré que, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un x_0 tel que, pour $x > x_0$, on ait $l - \epsilon < f(x) \leq l$ donc $|f(x) - l| < \epsilon$. C'est exactement dire que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$.

4) Soit $a \in \mathbf{R}$. Montrer (avec les epsilon) que si $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers l et l' quand x tend vers a, alors $f(x)g(x)$ tend vers ll' quand x tend vers a.

Il faut démontrer :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \; (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x)g(x) - ll'| < \epsilon).$$

Soit $1 > \epsilon > 0$. Comme $\lim_{x \to a} f(x) = l$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que, pour $|x - a| < \alpha$, on ait $|f(x) - l| < \epsilon/(1 + |l| + |l'|)$. Fixons un tel α. En particulier, pour $|x - a| < \alpha$, on a $|f(x)| < |l| + 1$. Comme $\lim_{x \to a} g(x) = l'$, il existe un nombre $\alpha' > 0$ tel que, pour $|x - a| < \alpha'$, on ait $|g(x) - l| < \epsilon/(1 + |l| + |l'|)$. Fixons un tel α'. Posons, $\eta = \min(\alpha, \alpha')$. Pour $|x - a| < \eta$, on a :

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - ll'| &= |f(x)g(x) - f(x)l' + f(x)l' - ll'| \\
&\leq |f(x)g(x) - f(x)l'| + |f(x)l' - ll'| \\
&\leq |f(x)||g(x) - l'| + |l'||f(x) - l| \\
&< (|l| + 1)\epsilon/(1 + |l| + |l'|) + |l'|\epsilon/(1 + |l| + |l'|) = \epsilon
\end{aligned}$$

Remarque : Il a été démontré que, pour tout $1 > \epsilon > 0$, on pouvait trouver $\eta > 0$ tel que $(|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x)g(x) - ll'| < \epsilon)$. C'est la même chose de dire que, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que $(|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x)g(x) - ll'| < \epsilon)$. Assurez-vous que vous comprenez bien pourquoi.

Exercice 1. 1) Donner la définition d'un ensemble dense dans $\mathbf{R}$.
Une partie E de $\mathbf{R}$ est dense dans $\mathbf{R}$ si, pour tout $x < y$ dans $\mathbf{R}$, il existe e dans E tel que $x < e < y$.
Une autre définition possible : Une partie E de $\mathbf{R}$ est dense dans $\mathbf{R}$ si, pour tout x dans $\mathbf{R}$, il existe une suite (e_n) de points de E convergeant vers x.

2) Montrer que l'ensemble des nombres rationnels est dense dans $\mathbf{R}$.
Soient $x < y$ deux réels. On a, ou bien $x < 0 < y$, ou bien $0 \leq x < y$, ou bien $x < y \leq 0$.
Si $x < 0 < y$ alors 0 est un rationnel compris entre x et y.
Si $0 \leq x < y$, prenons un entier n tel que $1/n < y - x$ *i.e.* un entier supérieur à $1/(y-x)$. Soit k le plus grand entier tel que k/n soit inférieur ou égal à x. On a alors, $x < (k+1)/n = k/n + 1/n \leq x + 1/n < x + (y-x) = y$, *i.e.* $x < (k+1)/n < y$.
Si $x < y \leq 0$ alors $0 \leq -y < -x$. On vient de montrer comment trouver un nombre rationnel q tel que $-y < q < -x$. Pour un tel nombre, on a alors $x < -q < y$.
On a donc montré que pour tout $x < y$, on peut trouver un nombre rationnel strictement compris entre x et y. *cqfd*
Exercice : en utilisant la fonction partie entière, montrer que, pour tout réel x, on peut trouver une suite de nombres rationnels convergeant vers x. On en déduit le résultat (deuxième définition).

Exercice 2. La fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$f(x) = \frac{\cos(2x^2)}{x}$$

est-elle majorée sur $\mathbf{R}_+^*$? Minorée sur $\mathbf{R}_+^*$? Justifier.
Pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, on a

$$-1 \leq \cos(2x^2) \leq 1.$$

Si $0 < 2x^2 < \pi/3$ *i.e.* $0 < x < \sqrt{\pi/6}$ (on se place dans $\mathbf{R}_+^*$, $x > 0$), alors

$$1/2 \leq \cos(2x^2) \leq 1.$$

Donc, si $x \geq \sqrt{\pi/6}$, on a

$$-\sqrt{6/\pi} \leq -1/x \leq f(x) \leq 1/x \leq \sqrt{6/\pi},$$

si $0 < x < \sqrt{\pi/6}$, on a

$$0 < \frac{1}{2x} \leq f(x).$$

Conclusion : f est minorée par $-\sqrt{6/\pi}$ (ce n'est pas la borne inférieure) et n'est pas majorée.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation suivante :

$$|x-1| < |x+1| - 1.$$

Si $x \leq -1$, l'inéquation s'écrit $1 - x < -x - 1 - 1$ *i.e.* $1 < -2$. Elle n'est pas satisfaite.
Si $-1 < x < 1$, l'inéquation s'écrit $1 - x < x + 1 - 1$ *i.e.* $1 < 2x$. Elle est satisfaite si $x > 1/2$. Les nombres compris entre $1/2$ et 1 sont solutions de l'inéquation.
Si $x \geq 1$, l'inéquation s'écrit $x - 1 < x + 1 - 1$ *i.e.* $-1 < 0$. Elle est toujours satisfaite. Les nombres ≥ 1 sont donc solutions.
Conclusion : l'ensemble des solutions est $]1/2, +\infty[$.

Exercice 4. Quelle est la borne inférieure de l'ensemble $\mathbf{Q} \cap [\sqrt{2}, +\infty[$? Justifier.
Le nombre $\sqrt{2}$ est un minorant de l'ensemble. Soit $\epsilon > 0$, comme $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$, il existe un rationnel q tel que $\sqrt{2} < q < \sqrt{2} + \epsilon$. Cela signifie que $\sqrt{2} + \epsilon$ n'est plus un minorant de $\mathbf{Q} \cap [\sqrt{2}, +\infty[$.
Le nombre $\sqrt{2}$ est donc un minorant de $\mathbf{Q} \cap [\sqrt{2}, +\infty[$ tel que, pour tout ϵ, $\sqrt{2} + \epsilon$ n'est plus un minorant de l'ensemble $\mathbf{Q} \cap [\sqrt{2}, +\infty[$. C'est donc le plus grand des minorants *i.e.* la borne inférieure de l'ensemble $\mathbf{Q} \cap [\sqrt{2}, +\infty[$

Exercice 5. Étudier la convergence des séries de termes généraux

$$\frac{\cos(1+2^n)}{3+3^n}; \qquad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

La première série est absolument convergente donc convergente. En effet, on a

$$0 \leq |\frac{\cos(1+2^n)}{3+3^n}| \leq 1/3^n$$

et $1/3^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente car de raison strictement inférieure à 1.
La deuxième série est aussi convergente (mais pas absolument convergente). C'est une série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 EN DÉCROISSANT. Le critère des séries alternées s'applique donc.