Devoir à la maison 2

Exercice 1. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, n un entier positif et $f_1, f_2, \dots, f_n : I \to \mathbf{R}$ des fonctions continues. Montrer que la fonction $x \mapsto \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ est continue sur I. (Indications : procéder par récurrence sur n ; pour le cas $n = 2$, on procédera de deux façons : (a) en utilisant la définition, (b) en remarquant que pour x et y dans $\mathbf{R}$ on a $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ (égalité qu'on démontrera).)

Exercice 2. Étudier la convergence des séries de termes généraux :

$$\cos(n\pi)\sin(n^{-1}); \qquad \frac{1 + 2n^3}{n!}.$$

Exercice 3. Montrer que la suite

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

a pour limite e en appliquant le théorème des accroissements finis sur $[0, 1]$ à la fonction

$$f(x) = e^{-x}(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}).$$

Exercice 4. Sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$ et critères d'irrationalité (CAPES 2005)
On dit qu'un sous-groupe additif H de $(\mathbf{R}, +)$ est discret si pour tout intervalle fermé borné I de $\mathbf{R}$, l'intersection $H \cap I$ est vide ou finie. Pour tout réel θ, on note $H\theta = \mathbf{Z} + \theta\mathbf{Z}$ le sous-groupe additif de $\mathbf{R}$ engendré par 1 et θ. Il est défini par :

$$H_\theta = \{p + q\theta \ / \ (p, q) \in \mathbf{Z}^2\}.$$

1) Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$ discrets sont de la forme :

$$a\mathbf{Z} = \{pa \ / \ p \in \mathbf{Z}\},$$

où a est un réel.
2) Soient H un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$ non réduit à $\{0\}$ et $K = H \cap \mathbf{R}_+^*$.
(a) Montrer que K admet une borne inférieure a dans $\mathbf{R}_+$.
(b) Montrer que si a est strictement positif, alors a est dans K.
(c) Montrer que si a est strictement positif, alors H est discret.
(d) Montrer que si a est nul, alors H est dense dans $\mathbf{R}$.
3) Montrer qu'un réel θ est irrationnel si et seulement si le sous-groupe additif de $\mathbf{R}$, $H_\theta = \theta\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$.
4) Montrer qu'un réel θ est irrationnel si et seulement si il existe deux suites (p_n) et (q_n) d'entiers relatifs telles que, pour tout n, on ait $q_n\theta - p_n \neq 0$ et $\lim_n q_n\theta - p_n = 0$.
5) Montrer l'irrationalité du nombre $e = \sum_0^\infty 1/k!$.