Devoir à la maison 1

À rendre le vendredi 22 octobre

Exercice 1. Étudier la convergence des séries de termes généraux :

$$\frac{(-1)^n n+1}{n^{3/2}}; \qquad \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}.$$

Exercice 2. Soient a et b sont deux nombres réels positifs tels que a/b n'appartienne pas à $\mathbb{Q}$ ($b \neq 0$).

1) On considère l'ensemble

$$E = \{na + pb \ / \ n \in \mathbb{Z}, \quad p \in \mathbb{Z}\}.$$

a) Montrer que E est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
On pose $\alpha = \inf(E \cap \mathbb{R}_+^*)$.
b) Justifier l'existence de α.
c) Supposons qu'il n'existe pas de suite d'éléments de $E \cap \mathbb{R}_+^*$ strictement supérieurs à α convergeant vers α. Montrer qu'alors α appartient à $E \cap \mathbb{R}_+^*$ et que $E \cap \mathbb{R}_+^*$ coïncide avec les multiples entiers positifs de α. En écrivant a ou b comme multiple de $\alpha \in E \cap \mathbb{R}_+^*$ obtenir une contradiction avec le fait que a/b n'appartienne pas à $\mathbb{Q}$.
d) En déduire que $\alpha = 0$ et que E est dense dans $\mathbb{R}$. (D'après c) il existe une suite d'éléments de $E \cap \mathbb{R}_+^*$ strictement supérieurs à α convergeant vers α. Utiliser la question 1) pour montrer que $E \cap \mathbb{R}_+^*$ contient des nombres réels positifs arbitrairement petits.)

2) Considérons l'ensemble

$$F = \{na - pb \ / \ n \in \mathbb{N}, \quad p \in \mathbb{N}\}.$$

a) Montrer que l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(n,p) = na - pb$ est injective.
b) Montrer que F n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
c) Posons $m = \min(a,b)$. Montrer que $na - pb$ appartient à $]0, m[$ pour une infinité de couples (n,p) d'entiers naturels. En déduire que $]0, m[$ contient une infinité d'éléments de F.
Soient $x < y$ deux éléments de $\mathbb{R}$.
d) Montrer qu'il existe deux éléments de $F \cap]0, m[$, u et v tels que $0 < u - v < y - x$. Montrer que l'un des deux nombres $u - v > 0$ ou $v - u < 0$ appartient à F.
e) Supposons $0 \leq x$ et $u - v \in F$. Montrer qu'il existe un élément de F strictement compris entre x et y.
f) Supposons $0 \leq x$ et $v - u \in F$. Montrer qu'on peut trouver un élément de F de la forme $ra + l(v-u)$ (où r et l sont des entiers naturels) strictement compris entre x et y.
g) Traiter de manière analogue le cas où $y \leq 0$.
h) Traiter le cas $x < 0 < y$ (trivial).
i) Conclure.

3) Application.
a) Montrer que $\log 2$ n'est pas rationnel (log est le logarithme décimal).
Fixons un nombre entier disons $n = 2541672$.
b) Montrer qu'il existe une puissance de 2 dont l'écriture en base 10 commence par 2541672 s'il existe des entiers naturels k, l tels que

$$\log n \leq l \log 2 - k < \log(n+1).$$

c) Donner des puissances de 2 dont l'écriture en base 10 commence par 7, par 9.
d) Déduire des questions 2), 3)a), 3)b) que pour toute suite finie de chiffres on peut trouver une infinité de puissances de 2 dont l'écriture décimale commence par cette suite de chiffres.