Examen du 16 décembre 2009

Documents et calculatrices sont interdits.

Questions de cours (4 points)
1) Énoncer le théorème de Rolle.
2) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
3) Donner la définition d'une valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
4) Soit E une partie de $\mathbf{R}$. Quand dit-on que E est dense dans $\mathbf{R}$?
5) Soit F une partie de $\mathbf{R}$. Quand dit-on que F a un plus grand élément ?
6) Donner le développement limité de $\sin x$ en 0 à l'ordre 7.
7) Donner le développement limité de $\sqrt{1+x}$ en 0 à l'ordre 3.
8) Donner le développement limité de $\tan x$ en 0 à l'ordre 5.

Exercice 1 (2,5 points)
Démontrer que $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$.
Soient $x < y$ deux réels. On a, ou bien $x < 0 < y$, ou bien $0 \leq x < y$, ou bien $x < y \leq 0$.
Si $x < 0 < y$ alors 0 est un rationnel compris entre x et y.
Si $0 \leq x < y$, prenons un entier n tel que $1/n < y - x$ *i.e.* un entier supérieur à $1/(y-x)$. Soit k le plus grand entier tel que k/n soit inférieur ou égal à x. On a alors, $x < (k+1)/n = k/n + 1/n \leq x + 1/n < x + (y-x) = y$, *i.e.* $x < (k+1)/n < y$.
Si $x < y \leq 0$ alors $0 \leq -y < -x$. On vient de montrer comment trouver un nombre rationnel q tel que $-y < q < -x$. Pour un tel nombre, on a alors $x < -q < y$.
On a donc montré que pour tout $x < y$, on peut trouver un nombre rationnel strictement compris entre x et y. *cqfd*

Exercice 2 (2,5 points)
Montrer (avec les epsilon) que si $f(x)$ tend vers l et $g(x)$ tend vers l' quand x tend vers a alors $2f(x)^2 - g(x)$ tend vers $2l^2 - l'$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $|x-a| < \alpha$, on ait $|f(x) - l| < 1$ (en particulier $|f(x)| \leq |l| + 1$). Fixons un tel α.
Toujours, parce que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a, il existe $\beta > 0$ tel que, pour $|x-a| < \beta$, on ait $|f(x) - l| < \epsilon/4(2|l|+1)$. Fixons un tel β.
Comme $g(x)$ tend vers l' quand x tend vers a, il existe $\gamma > 0$ tel que, pour $|x-a| < \gamma$, on a $|g(x) - l'| < \epsilon/2$. Fixons un tel γ.
Alors si $|x - a| < \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$, on a

$$\begin{aligned} |2f(x)^2 - g(x) - (2l^2 - l')| &\leq 2|f(x)^2 - l^2| + |g(x) - l'| \leq 2|f(x) - l||f(x) + l| + |g(x) - l'| \\ &< 2\frac{\epsilon}{4(2|l|+1)}(2|l|+1) + \epsilon/2 \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un nombre $\alpha' > 0$ tel que, pour $|x - a| < \alpha'$, on ait $|2f(x)^2 - g(x) - (2l^2 - l')| < \epsilon$. C'est exactement dire que $2f(x)^2 - g(x)$ tend vers $2l^2 - l'$ lorsque x tend vers a.

Exercice 3 (4 points)
Donner les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre et au point indiqués.

1) $\dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$ à l'ordre 5 en 0.

On connaît le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + x^5\epsilon(x).$$

Pour obtenir le développement limité demandé il suffit de diviser suivant les puissances croissantes $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ par $1 - x$. On obtient

$$\frac{\ln(1+x)}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + \frac{7x^4}{12} + \frac{47x^5}{60} + x^5\epsilon(x).$$

2) $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 en 2.

Donner le développement en 2 de $\sqrt{1+x}$ revient à donner le développement limité de $\sqrt{1+2+h} = \sqrt{3+h}$ en 0. On se ramène alors à un développement connu en mettant 3 en facteur :

$$\begin{aligned}\sqrt{3+h} &= \sqrt{3(1+h/3)} = \sqrt{3}\sqrt{1+h/3} \\ &= \sqrt{3}(1 + 1/2.h/3 + (1/2)(-1/2).(h/3)^2/2 + (1/2)(-1/2)(-3/2).(h/3)^3/6 + h^3\epsilon(h)) \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{3}h/6 - \sqrt{3}h^2/72 + \sqrt{3}h^3/432 + h^3\epsilon(h)).\end{aligned}$$

3) $\cos(\ln(1+x))$ à l'ordre 5 en 0.
En 0, $\ln(1+x)$ vaut 0, on peut donc obtenir le développement limité demandé en substituant celui de $\ln(1+x)$ dans celui de cos :

$$\cos(\ln(1+x)) = 1 - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5})^2/2 + (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5})^4/24 + x^5\epsilon(x),$$

et en ne retenant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à 5 dans les puissances. On obtient :

$$\cos(\ln(1+x)) = 1 - (x^2 + (\frac{x^2}{2})^2 - 2x^3/2 + 2x^4/3 - 2x^5/4 - x^5/3)/2 + (x^4 - 2x^5)/24 + x^5\epsilon(x).$$

soit

$$\cos(\ln(1+x)) = 1 - x^2/2 + x^3/2 - 5x^4/12 + x^5/3 + x^5\epsilon(x).$$

Exercice 4 (2 points)
Étudier la convergence de la série de terme général

$$n(\ln(n^3+1) - \ln(n^3)).$$

On a

$$n(\ln(n^3+1) - \ln(n^3)) = n\ln\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right) = n\ln(1 + \frac{1}{n^3}).$$

Or on sait que $\ln(1+x) = x + x\epsilon(x)$, avec $\epsilon(x)$ tendant vers 0 lorsque x tend vers 0. On a donc

$$n(\ln(n^3+1) - \ln(n^3)) = \frac{1}{n^2}(1 + \epsilon(\frac{1}{n^2})),$$

avec $\lim \epsilon(\frac{1}{n^3}) = 0$. Donc pour n assez grand on a

$$0 \leq n(\ln(n^3+1) - \ln(n^3)) \leq \frac{2}{n^2}.$$

Or la série de terme général, $\frac{2}{n^2}$ converge donc la série de terme général positif $n(\ln(n^3+1) - \ln(n^3))$ converge.

Exercice 5 (6 points)
On considère la fonction suivante :

$$\phi(x) = \exp(-1/x) \text{ si } x > 0, \quad 0 \text{ si } x \leq 0.$$

Dans l'exercice on utilisera sans justification le fait que la fonction exponentielle croît plus vite que tout polynôme en plus l'infini. On admettra aussi que la fonction exponentielle est dérivable

ainsi que les fractions rationnelles sur leur ensembles de définitions.
1) Montrer que ϕ est dérivable en 0 de dérivée nulle. Indication : utiliser la définition de la dérivée. En déduire que ϕ est dérivable sur $\mathbf{R}$. Donner une expression de $\phi'(x)$ (distinguer $x \leq 0$ et $x > 0$).
Étudions le rapport

$$\frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0}$$

quand x tend vers 0. Pour $x < 0$ ce rapport est nul ; en particulier la limite à gauche du rapport vaut 0. Lorsque x est positif on a

$$\frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} = \frac{\exp(-1/x)}{x} = \frac{1/x}{\exp(1/x)}.$$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, $1/x$ tend vers $+\infty$. Le rapport $\frac{1/x}{\exp(1/x)}$ tend donc vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Le rapport

$$\frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0}$$

tend donc vers 0 lorsque x tend vers 0. C'est dire exactement que ϕ est dérivable en 0 de dérivée nulle. Sur $\mathbf{R}^*$ ϕ est une composée de fonctions indéfiniment dérivables donc est dérivable. On a

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= 0 \text{ si } x \leq 0 \\ &= \frac{\exp(-1/x)}{x^2} \text{ si } x > 0. \end{aligned}$$

2) Montrer que ϕ' est dérivable en 0, puis sur $\mathbf{R}$, de dérivée continue.
On recommence ce qu'on vient de faire avec ϕ' à la place de ϕ. Pour $x < 0$, le rapport

$$\frac{\phi'(x) - \phi'(0)}{x - 0} = 0$$

tend vers 0 ; pour $x > 0$ il vaut

$$\frac{\phi'(x) - \phi'(0)}{x - 0} = \frac{\exp(-1/x)}{x^3} = \frac{1/x^3}{\exp(1/x)}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0 car $\exp(X)/X^3$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On en déduit que ϕ' est dérivable en 0 de dérivée nulle en 0. Elle est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables. On a

$$\begin{aligned} \phi''(x) &= 0 \text{ si } x \leq 0 \\ &= \exp(-1/x)\frac{1 - 2x}{x^4} \text{ si } x > 0. \end{aligned}$$

Comme $\frac{\exp(-1/x)}{x^4}$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs positives cette fonction est continue en 0. Sur $\mathbf{R}^*$, ϕ'' est continue comme composée de fonctions continues. Finalement ϕ'' est continue sur $\mathbf{R}$.
3) Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{\phi(x)}{\phi(x) + \phi(1 - x)}.$$

Montrer que f est définie sur $\mathbf{R}$ (*i.e.* que $\phi(x) + \phi(1 - x)$ ne s'annule pas). Que vaut $f(x)$ pour $x \leq 0$, pour $x \geq 1$? Pourquoi la fonction f est elle de classe C^2 ? Dessiner le graphe de f.

La fonction ϕ est nulle sur $\mathbf{R}_-$, strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$, donc $\phi(1-x)$ est nul si $x \geq 1$, strictement positif si $x < 1$. La somme $\phi(x) + \phi(1-x)$ est donc strictement positive pour tout x et f est bien définie sur $\mathbf{R}$. Pour $x \leq 0$, $f(x) = 0$; pour $x \geq 1$, $\phi(1-x) = 0$ donc $f(x) = 1$. Comme f est un quotient de fonctions de classe C^2, elle est de classe C^2 là où elle est définie, sur $\mathbf{R}$ ici.

4) Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f'(c) = 1$. Montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$ il existe $d \in \mathbf{R}$ tel que $f'(d) = \alpha$.

On a $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, f est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$. Le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un nombre $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c)(1-0) = f(1) - f(0)$, c'est-à-dire $f'(c) = 1$. Soit $\alpha \in]0, 1[$, on a $1/\alpha > 1$ donc $f(1/\alpha) = 1$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à f entre 0 et $1/\alpha$, il existe $d > 0$ tel que $1 = f(1/\alpha) - f(0) = f'(d)(1/\alpha - 0)$, c'est-à-dire $f'(d) = \alpha$.