DS3

(19 novembre 2010, durée 1h)

Questions de cours(4 points)
1) Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.
2) Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Donner la définition de "f est uniformément continue sur I".
3) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1. (3 points)
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\operatorname{Argch}(1+e^{-x^2}), \qquad \frac{1+\sinh(x)}{2+\cos(x^2)}, \qquad \ln(1+x^{1/4})(1+x)^{1/3}.$$

Exercice 2. (3 points)
Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n(-1)^n + 2\sin n}{n^2}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{\sinh n}{2+\sin(e^n)}.$$

On a

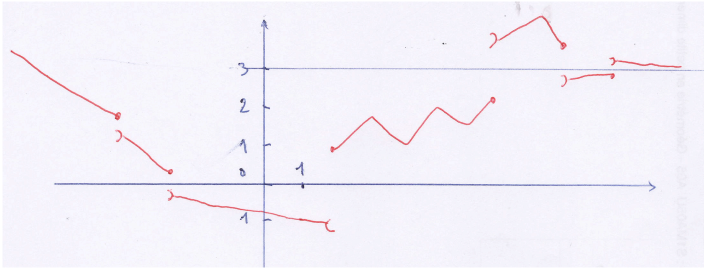
$$\frac{n(-1)^n + 2\sin n}{n^2} = \frac{n(-1)^n}{n^2} + \frac{2\sin n}{n^2} = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2\sin n}{n^2}.$$

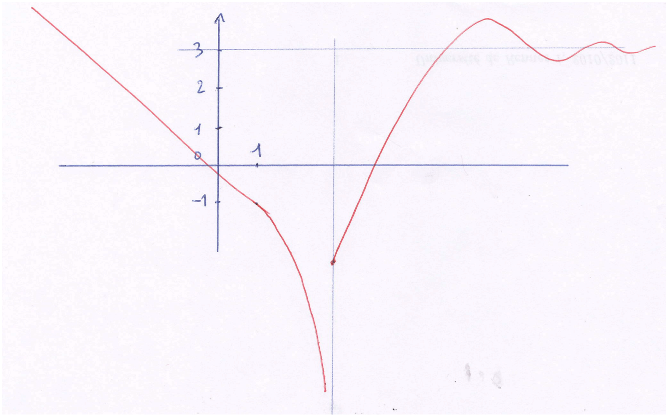
La suite $(\frac{(-1)^n}{n})_n$ est alternée, la suite des valeurs absolues $(\frac{1}{n})_n$ décroît vers 0. Le critère des séries alternées assure donc que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge.
On a

$$0 \leq |\frac{2\sin n}{n^2}| \leq \frac{2}{n^2}.$$

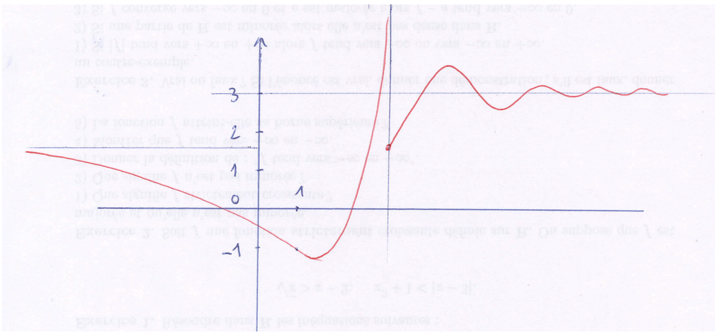
Or la série de terme général $\frac{2}{n^2}$ converge (série de Riemann avec 2>1), donc la série de terme général $\frac{2\sin n}{n^2}$ converge absolument donc converge.
Finalement la série de terme général $\frac{n(-1)^n+2\sin n}{n^2}$, somme de deux termes de séries convergentes, converge.
Lorsque n tend vers l'infini le nombre $\sinh n$ tend vers $+\infty$. Comme $2+\sin(e^n)$ reste supérieur ou égal à 1, la suite $(\frac{\sinh n}{2+\sin(e^n)})_n$ tend vers $+\infty$. La deuxième série diverge donc (grossièrement).

Exercice 3. (7 points)
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 1]$, telle que $f(1) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$.
1) Donner un exemple de fonction (un dessin de graphe suffira) satisfaisant ces propriétés et qui ne soit pas bornée sur $\mathbb{R}$.





2) Donner un exemple de fonction (un dessin de graphe suffira) satisfaisant ces propriétés, ayant une limite en $-\infty$ et qui ne soit pas bornée sur $\mathbb{R}$.



3) Montrer que si on suppose de plus que f est bornée sur $\mathbb{R}$ alors f a une limite en $-\infty$.
Si f est bornée sur $\mathbb{R}$ alors elle est bornée sur $]-\infty, 1]$. Notons M la borne supérieure de f sur $]-\infty, 1]$. Je vais montrer que f tend vers M en $-\infty$. Soit $\epsilon > 0$. Le nombre $M - \epsilon$ n'est pas un majorant de f sur $]-\infty, 1]$. Il existe donc $x_0 \in]-\infty, 1]$ tel que $f(x_0)$ soit supérieur à $M - \epsilon$. Mais comme f est décroissante sur $]-\infty, 1]$, pour $x \leq x_0$ on a $f(x) \geq f(x_0) > M - \epsilon$. Comme par ailleurs on a $f(x) \leq \sup_{]-\infty,1]} f$. On a :

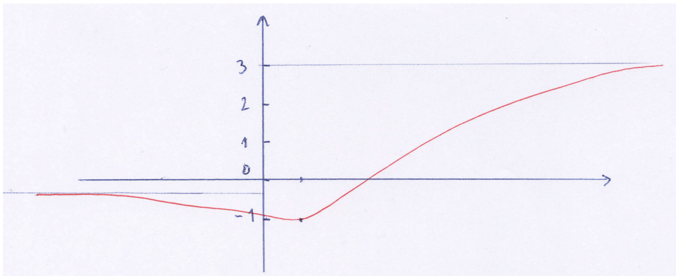
$$\forall x \leq x_0 \quad M - \epsilon < f(x) \leq M.$$

On a donc montré

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists x_0 \leq 1 \; (x \leq x_0 \Rightarrow |f(x) - M| < \epsilon).$$

C'est exactement dire que f tend vers M en $-\infty$.
On suppose maintenant **de plus** que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que f s'annule au moins une fois, que f' s'annule au moins une fois. Dessiner le graphe d'une fonction satisfaisant toutes les hypothèses pour laquelle f et f' ne s'annulent qu'une fois.
Comme f tend vers 3 en $+\infty$ il existe $x_1 > 1$ tel que $f(x_1) > 0$. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $[1, x_1]$. On a $f(1) = -1 < 0$, $f(x_1) > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc l'existence de $c \in]1, x_1[$ tel que $f(c) = 0$.
Si pour tout $x \leq 1$ on a $f(x) = -1$ alors f' s'annule (en 0 par exemple).
Sinon, comme f est décroissante sur $]-\infty, 1]$, il existe $x < 1$ tel que $f(x) > -1$. Prenons un tel x. Si $f(x) \leq 0$ posons $x_2 = x$. Si $f(x) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un élément x_2 entre x et 1 tel que $f(x_2) = 0$. Dans tous les cas on a un nombre $x_2 < 1$ tel que $-1 < f(x_2) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe aussi dans l'intervalle $]1, x_1[$ (x_1 défini plus haut)), un nombre x_3 tel que $f(x_3) = f(x_2)$. La fonction f est continue sur $[x_2, x_3]$, dérivable sur $]x_2, x_3[$ et $f(x_2) = f(x_3)$. D'après le théorème de Rolle il existe donc $d \in]x_2, x_3[$ tel que $f'(d) = 0$.



5) Montrer que si f ne s'annule qu'une fois alors f est bornée sur $\mathbb{R}$.
On a vu que f s'annule au moins une fois en un nombre supérieur à 1. Si f ne s'annule qu'une fois alors elle ne s'annule pas sur $]-\infty, 1]$. Comme f est continue sur $]-\infty, 1]$, vaut -1 en 1, alors elle est négative sur $]-\infty, 1]$ (si elle était positive en un point $x < 1$ alors le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f entre x et 1 assurerait l'existence d'un point $y \in [x, 1]$ tel que $f(y) = 0$ et f s'annulerait au moins une deuxième fois). D'autre part comme f est décroissante sur $]-\infty, 1]$, pour $t \in]-\infty, 1]$ on a $f(t) \geq f(1) = -1$. On a donc montré que si f ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout $t \in]-\infty, 1]$, on a $0 > f(t) \geq -1$.
Comme f tend vers 3 en $+\infty$, il existe $R > 1$ tel que, pour $t \geq R$, on ait $2 \leq f(t) \leq 4$. La fonction f est continue sur $[1, R]$, elle est donc bornée sur $[1, R]$: il existe $M > 0$ tel que, pour tout $t \in [1, R]$, on ait $-M < f(t) < M$.
Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\min(-1, -M) \leq f(t) \leq \max(4, M).$$

La fonction f est donc bien bornée si elle ne s'annule qu'une fois.
6) Montrer qu'il existe une suite u_n tendant vers $+\infty$ telle que $\lim f'(u_n) = 0$ (indication : appliquer le théorème des accroissements finis à f entre des points "bien choisis"). La fonction f' tend-elle nécessairement vers 0 ?
Soit n un entier naturel. La fonction f est continue sur $[n, n+1]$, dérivable sur $]n, n+1[$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $f$entre les points

n et $n+1$: il existe $u_n \in]n, n+1[$ tel que $f(n+1) - f(n) = f'(u_n)$. Il existe donc une suite $(u_n)_n$ tel que, pour tout n entier naturel, on ait $f(n+1) - f(n) = f'(u_n)$. Comme f tend vers 3 en $+\infty$, pour toute suite $(v_n)_n$ tendant vers $+\infty$, la suite $f(v_n)$ tend vers 3. En particulier $(f(n))_n$ tend vers 3, et $(f(n+1))_n$ aussi. La suite $(f(n+1) - f(n))_n$ converge donc vers 0. Finalement la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ et $(f'(u_n))_n$ tend vers 0. Non, la fonction f' ne tend pas nécessairement vers 0 (penser à $f(x) = 3 + \sin(x^2)/x$ pour $x > 2$ par exemple)

Exercice 4. (3 points)
Vrai ou faux ? Si l'énoncé est vrai, donner une démonstration ; s'il est faux, donner un contre-exemple.
a) Si f est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ positive ou nulle qui prend une valeur différente de 0 alors on peut trouver un intervalle sur lequel f est strictement positive.
Vrai. Soit x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$. Comme f est positive ou nulle on a $f(x_0) > 0$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue en x_0. Prenons $\alpha > 0$ tel que si $|x - x_0| < \alpha$ alors $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)/2$. Alors, si $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ on a $f(x) > f(x_0)/2$.
b) Si l'image par f de $[a, b]$ n'est pas un segment, alors f n'est pas continue sur $[a, b]$.
Vrai. La contraposée est vraie : si f est continue sur $[a, b]$, alors l'image par f de $[a, b]$ est un segment.
c) Si f est continue sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.
Faux. Exemple : $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = \sin x$.