DS2

(22 octobre 2010, durée 1h)

Questions de cours

1) Montrer (avec les epsilon) que si $f(x)$ est bornée et si $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, alors $f(x)/g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

Il s'agit de montrer

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ R \in \mathbb{R}\ (x < R\ \Rightarrow |f(x)/g(x)| < \epsilon)$$

Soit $\epsilon > 0$.

Soit $M > 0$ tel que pour tout x on ait $|f(x)| < M$. Un tel M existe car f est bornée.

Soit $R \in \mathbb{R}$ tel que pour $x < R$ on ait $g(x) > M/\epsilon$. Un tel R existe car $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

Alors pour $x < R$ on a

$$|f(x)/g(x)| = |f(x)|/g(x) < M/g(x) < M/(M/\epsilon) = \epsilon.$$

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer (avec les epsilon) que si $f(x)$ tend vers l et $g(x)$ tend vers l' quand x tend vers a alors $f^2(x) - g(x)$ tend vers $l^2 - l'$ quand x tend vers a.

Il s'agit de montrer

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \eta \in \mathbb{R}\ (|x - a| < \eta\ \Rightarrow |f^2(x) - g(x) - (l^2 - l')| < \epsilon)$$

Soit $\epsilon > 0$.

Prenons $\alpha > 0$ tel que, pour $|x - a| < \alpha$ on ait $|f(x) - l| < 1$. Un tel α existe car $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a.

Alors pour $|x - a| < \alpha$, on a $|f(x) + l| < 2|l| + 1$.

Prenons $\beta > 0$ tel que, pour $|x - a| < \beta$, on ait $|f(x) - l| < \epsilon/(2(2|l| + 1))$. Un tel β existe car $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a.

Prenons $\gamma > 0$ tel que, pour $|x - a| < \gamma$, on ait $|g(x) - l'| < \epsilon/2$. Un tel γ existe car $g(x)$ tend vers l' quand x tend vers a.

Posons $\eta = \min(\alpha, \beta, \gamma)$. Alors, pour $|x - a| < \eta$, on a

$$\begin{aligned} |f^2(x) - g(x) - (l^2 - l')| &\leq |f^2(x) - l^2| + |g(x) - l'| \\ &\leq |f(x) + l||f(x) - l| + |g(x) - l'| \\ &< (2|l| + 1)\epsilon/(2(2|l| + 1)) + \epsilon/2 \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

3) Montrer qu'il n'existe pas de surjection d'un ensemble sur l'ensemble de toutes ses parties.

Soit E un ensemble. Supposons qu'une surjection $\phi : E \to \mathcal{P}(E)$ existe. Considérons alors la partie A de E défini par

$$A = \{x \in E \ / \ x \notin \phi(x)\}$$

L'application ϕ étant surjective, il existe $a \in E$ tel que $A = \phi(a)$. Alors si $a \in \phi(a)$, $a \notin A$ (par définition de A), *i.e.* $a \notin \phi(a)$ (car $A = \phi(a)$) ; et si $a \notin \phi(a)$, $a \in A$ (par définition de A), *i.e.* $a \in \phi(a)$. La supposition faite est donc absurde.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\sqrt{x} > x - 2; \qquad x^2 + 1 < |x - 3|.$$

La première inéquation

$$\sqrt{x} > x - 2$$

n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$. Si $x \leq 2$ alors elle est satisfaite (car $x - 2 \leq 0 \leq \sqrt{x}$). Lorsque x appartient à $]2, +\infty[$, l'inégalité est équivalente à $x > (x-2)^2$ c'est-à-dire à $x^2 - 5x + 4 < 0$, soit $(x-1)(x-4) < 0$, ou encore $x \in]1, 4[$. L'ensemble des solutions de la première inéquation est donc $[0, 4[$.
Pour $x \geq 3$, la deuxième inéquation est équivalente à

$$x^2 + 1 < x - 3.$$

soit $x^2 - x + 4 < 0$. Le discriminant de ce trinôme est négatif. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 + 1 < x - 3$. L'inéquation n'a donc pas de solution supérieure ou égale à 3. Pour $x \leq 3$, la deuxième inéquation est équivalente à

$$x^2 + 1 < 3 - x.$$

soit $x^2 + x - 2 < 0$ soit $(x-1)(x+2) < 0$. L'ensemble des solutions de la deuxième inéquation est donc $]-2, 1[$.

Exercice 2. Soit f une fonction **strictement** croissante définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est majorée et qu'elle n'est pas minorée.
1) Que signifie f strictement croissante ?

$$\forall x < y \text{ on a } f(x) < f(y).$$

2) Que signifie f n'est pas minorée ?

$$\forall R \in \mathbb{R} \ \exists \ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) < R.$$

3) Donner la définition de : "f tend vers $-\infty$ en $-\infty$".

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \ N \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } (x < N \Rightarrow f(x) < M).$$

4) Montrer que f tend vers $-\infty$ en $-\infty$.
Soit $M \in \mathbb{R}$.
Prenons N dans $\mathbb{R}$ tel que $f(N) < M$. Un tel N existe d'après 2). Alors, comme f est strictement croissante, pour $x < N$, on a $f(x) < f(N) < M$.
5) La fonction f atteint-elle sa borne supérieure ?
Non. Supposons le contraire. Prenons x_0 tel que $f(x_0) = \sup f$ (la borne supérieure est définie car f est majorée). Alors, comme f est strictement croissante, on a $f(x_0+1) > f(x_0) = \sup f$. Contradiction.

Exercice 3. Vrai ou faux ? Si l'énoncé est vrai, donner une démonstration ; s'il est faux, donner un contre-exemple.
1) Si $|f|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ alors f tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ en $+\infty$.
Faux. Considérer la fonction définie $f(x) = (-n)^n$ si $x \in [n, n+1[$, n variant dans l'ensemble des entiers naturels.
2) Si une partie de $\mathbb{R}$ est minorée alors elle n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.
Vrai. Soient E une partie minorée de $\mathbb{R}$ et m un minorant de E. Alors l'intervalle ouvert non vide $]m-12, m-3[$ ne contient aucun élément de E. La partie E n'est donc pas dense dans $\mathbb{R}$.
3) Si f converge vers $-\infty$ en 0 et g est majorée alors $f-g$ tend vers $-\infty$ en 0.
Faux. Prendre une fonction majorée tendant vers $-\infty$ en 0 et $g = f$.

Exercice 4. Étudier la convergence de la série de terme général

$$\frac{\sin(n) + e^{-n}}{n^2}.$$

On a

$$0 \leq \left|\frac{\sin(n) + e^{-n}}{n^2}\right| \leq \frac{2}{n^2}.$$

Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$), donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)+e^{-n}}{n^2}$ converge absolument, donc converge.