DS1

(Un corrigé)

Exercice 1. Soient X un ensemble et f une fonction de X dans $\mathbb{R}$ majorée. Démontrer que la fonction $-f$ est minorée et que

$$\inf(-f) = -\sup(f)$$

Le nombre $\sup(f)$ est un majorant de f. Pour tout x dans X on a $f(x) \leq \sup(f)$, d'où $-f(x) \geq -\sup(f)$. Autrement dit $-\sup(f)$ est un minorant de $-f$. Maintenant soit m un nombre supérieur à $-\sup(f)$: $m > -\sup(f)$. Alors $-m < \sup(f)$ et, comme $\sup(f)$ est le plus petit des majorants de f, il existe x dans X tel que $f(x) > -m$. Mais alors $-f(x) < m$ et donc m n'est pas un minorant de $-f$. Conclusion $-\sup(f)$ est le plus grand des minorants de $-f$, sa borne inférieure.

Exercice 2. Soient A et B deux parties non vides minorées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est minorée et que

$$\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B)).$$

Voir le cours.

Exercice 3. *Soit B une partie non majorée de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de B tendant vers $+\infty$. On commencera par écrire les définitions formelles de "B n'est pas majorée" et de "$(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$".*

B n'est pas majorée :

$$\forall M \; \exists b \in B \; b > M$$

$(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$:

$$\forall M \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; u_n > M$$

Comme B n'est pas majorée, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe u_k dans B tel que $u_k > k$. Pour chaque k prenons un tel u_k. Alors la suite (u_k) est une suite d'éléments de B tendant vers l'infini.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} < \frac{1}{|x|}.$$

Pour $x > 0$ l'inégalité est satisfaite car, pour tout $x > 0$, on a $x < (x+1) < (x+1)(x+2)$. Le nombre $(x+1)(x+2)$ est négatif si et seulement si x est compris entre -2 et -1. Comme $\frac{1}{|x|}$ est positif l'inégalité est satisfaite pour $x \in]-2, -1[$.
Pour $x < -2$ ou $x \in]-1, 0[$ l'inégalité s'écrit

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} < \frac{1}{-x},$$

et est équivalente à (les nombres $-x$ et $(x+1)(x+2)$ sont positifs)

$$-x < (x+1)(x+2),$$

soit $x^2+4x+2>0$ ou encore $x<-2-\sqrt{2}$ ou $x>-2+\sqrt{2}$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc

$$]-\infty,-2-\sqrt{2}[\cup]-2,-1[\cup]-2+\sqrt{2},0[\cup]0,\infty[.$$

Exercice 5. 1) Montrer que si le carré d'un nombre entier p est multiple de 5 alors le nombre p lui-même est multiple de 5. On pourra procéder par contraposée : si un entier n n'est pas multiple de 5 alors son carré n'est pas multiple de 5.
Si p n'est pas multiple de 5 alors il est congru à -2, -1, 1 ou 2 modulo 5. Mais alors son carré est congru à -1, 1, 1, -1 modulo 5 (respectivement) et donc p^2 n'est pas multiple de 5 non plus.
2) Montrer que $\sqrt{5}$ n'est pas rationnel.
Supposons que $\sqrt{5}$ soit rationnel. Alors on peut écrire $\sqrt{5}=p/q$ avec p et q deux entiers naturels premiers entre eux. En portant cette égalité au carré on obtient $5q^2=p^2$. Donc p^2 est multiple de 5. D'après 1) ceci entraîne que p est aussi multiple de 5. Écrivons $p=5p'$. L'égalité devient $5q^2=25p'^2$ soit $q^2=5p'^2$. Mais alors q^2 est multiple de 5 et q aussi. Contradiction car p et q sont premiers entre eux.
On pose

$$A=\{x\in\mathbb{Q}\ /\ \sqrt{5}\leq x\}.$$

3) Le nombre $\sqrt{5}$ appartient-il à A ? Non car $\sqrt{5}$ n'est pas rationnel. Quelle est la borne inférieure de A ? Justifier (on pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Par définition $\sqrt{5}$ est un minorant de A. Soit m un nombre plus grand que $\sqrt{5}$: $m>\sqrt{5}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ il existe un nombre rationnel r dans l'intervalle $]\sqrt{5},m[$. Mais alors un tel r appartient à A et est inférieur à m donc m n'est pas un minorant de A. Par conséquent, $\sqrt{5}$ est la borne inférieure de A. L'ensemble A a-t-il un plus petit élément ? Justifier. Non, car si un ensemble a un plus petit élément alors ce plus petit élément est aussi sa borne inférieure. Or on vient de voir que la borne inférieure de A, $\sqrt{5}$, n'appartenait pas à A.

Exercice 6. *Donner le développement décimal de* $\frac{2}{13}$.
$0,153846153846\underline{153846}\dots$