Correction d'un exercice de la feuille WIMS numéro 2

L'énoncé

Rappelons la définition. Une fonction f est continue en un point x_0, si :

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, tel que $|x - x_0| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$.

Considérons donc la fonction : $f(x) = 6\cos(x/7) + 2,6$.

Au point $x_0 = 5.008$, et pour $\epsilon = 0,3497$, trouvez un $\delta > 0$ qui remplit la condition ci-dessus.

La solution

Comme expliqué dans la règle du jeu, il s'agit de trouver un δ qui remplit la condition, aussi grand que possible. Sont donnés : $f(x_0) = 7,1288732$, $f(x_0)+\epsilon = 7,4785732$ et $f(x_0)-\epsilon = 6,7791732$. Cherchons deux nombres x et x' tels que

$$f(x) = f(x_0) - \epsilon, \quad f(x') = f(x_0) + \epsilon.$$

On doit avoir $6\cos(x/7) + 2,6 = 6,7791732$ c'est-à-dire $\cos(x/7) = (6,7791732 - 2,6)/6 = 0,6965289$. Le nombre $x = 7\arccos(0,6965289) = 5,6017349$ satisfait $f(x) = f(x_0) - \epsilon$.

On doit avoir $6\cos(x'/7) + 2,6 = 7,4785732$ c'est-à-dire $\cos(x'/7) = (7,4785732 - 2,6)/6 = 0,8130955$. Le nombre $x' = 7\arccos(0,8130955) = 4,3494237$ satisfait $f(x') = f(x_0) + \epsilon$.

On vérifie que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[x', x]$. Cet intervalle contient x_0. Quand on sort de $[x', x]$, f prend des valeurs supérieures à $f(x_0)+\epsilon$ ou inférieures à $f(x_0)-\epsilon$. Sur $[x', x]$, f prend des valeurs comprises entre $f(x_0)+\epsilon$ et $f(x_0)-\epsilon$. On cherche un intervalle de la forme $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ sur lequel f prend des valeurs comprises entre $f(x_0)+\epsilon$ et $f(x_0)-\epsilon$. On prend l'intervalle de cette forme le plus long qui soit contenu dans $[x', x]$. Il faut prendre $\delta = \min\{x_0 - x', x - x_0\} = \min\{0,6585766; 0,5937352\} = 0,5937352$.

J'ai entré $\delta = 0,593735$ et obtenu la note maximale (il ne faut surtout pas prendre une valeur approchée par excès). Ci-dessus les valeurs approchées sont écrites au fur et à mesure, mais je n'ai jamais utilisé une ancienne valeur approchée pour en calculer une nouvelle (pas même celles de l'énoncé).