

Feuille 3

Exercice 1. Calculer les intégrales généralisées suivantes

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \quad \int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx \quad \int_0^{+\infty} (x^2-3)e^{-x} dx$$

Exercice 2. Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{x^2+1} dx, \quad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{(1-x)^3}} dx.$$

Exercice 3. (*Lois exponentielles*) Soit λ un nombre strictement positif. Montrer que les trois intégrales suivantes convergent et les calculer

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx, \quad \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \lambda(x - \frac{1}{\lambda})^2 e^{-\lambda x} dx.$$

Exercice 4. (*Lois normales*) Soient μ un nombre réel et σ un nombre strictement positif.

1. Montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

est convergente.

2. On admet que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Après avoir justifier leurs convergences, calculer les trois intégrales suivantes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

3. Après avoir justifier leurs convergences, calculer les trois intégrales suivantes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma}}.$$

Exercice 5. Soit T un nombre strictement positif. Montrer que l'intégrale

$$\int_T^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

converge et que

$$\int_T^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \frac{e^{-\frac{T^2}{2}}}{T}.$$

Exercice 6. Pour chacune des intégrales indiquées ci-dessous, préciser s'il s'agit d'une intégrale généralisée ou d'une intégrale de Riemann; étudier la nature des intégrales généralisées (convergence absolue, convergence, divergence).

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \quad \int_0^1 \frac{1}{\ln(x)} dx \quad \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3+1}} dx \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^3+1}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x) dx \quad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)} dx \quad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} dx$$

Exercice 7. Montrer que si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

converge si et seulement si Q n'a pas de racines réelles et $\deg Q \geq \deg P + 2$.

Exercice 8. Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$\begin{array}{ll} 1. \int_0^1 \ln t \, dt & 2. \int_0^{+\infty} t^5 e^{-t^2} \, dt \\ 3. \int_0^{+\infty} x \sin x e^{-x} \, dx & 4. \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} \, dt \\ 5. \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} \end{array}$$

Exercice 9. Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$\begin{array}{ll} 1. \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} & 2. \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} \, dt \\ 3. \int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) \, dt \end{array}$$

Exercice 10. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et croissante. On note $S_n = \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$. On suppose que $\int_a^b f(t) dt$ converge. Montrer que la suite (S_n) converge vers $\int_a^b f(t) dt$. On suppose que $\int_a^b f(t) dt$ diverge. Montrer que la suite (S_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 11. Discuter, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} \, dt \quad 2. \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) \, dx$$

Exercice 12. Montrer que les intégrales généralisées suivantes sont convergentes et calculer leurs valeurs

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \, dx, \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)}, \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} \, dx, \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \, dx.$$

Exercice 13. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt$$

converge.

1. Montrer que la fonction

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt$$

est bien définie et que F est une primitive de f .

2. Montrer que

$$G(x) = \int_x^{+\infty} f(t) \, dt$$

est bien définie et dérivable. Que vaut $G'(x)$?