Exercice 6

* $0 \leq \frac{e^{-x}}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\int_0 \frac{dx}{x}$ diverge

donc $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx$ diverge

et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ diverge.

(Rq : $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ converge).

* On prend la valeur absolue $\left|\frac{1}{\ln x}\right| = \frac{-1}{\ln x}$ si $x \in]0,1[$

En 0, $\frac{1}{\ln x} \longrightarrow 0$: la fonction est prolongeable par continuité. Sur $]0,1[$, $x \longrightarrow \frac{1}{\ln x}$ est continue.

En 1, $\frac{-1}{\ln x} \longrightarrow +\infty$. Le seul problème est en 1.

On a $\frac{-1}{\ln x} \underset{x \to 1}{\sim} \frac{1}{1-x}$ (faire un DL).

Or $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ diverge. donc $\int_0^1 \frac{-1}{\ln x} dx$ diverge. Et $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ diverge aussi

* $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0,1]$ et

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (faire un DL)

donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

(ce n'est pas vraiment une intégrale généralisée).

* $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3+1}} dx$. Le seul problème est en $+\infty$.

$x \geq 0$ $\quad 0 \leq \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ $\quad$ en $+\infty$ $\quad \frac{x}{\sqrt{x^3+1}} \sim \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$

α $1/2 \leq 1$ donc $\int^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}}$ diverge

et $\int^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3+1}} dx$ diverge aussi.

* $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^3+1}} dx$ converge (il n'y a aucun problème)
intégrale d'une fonction continue sur $[0,1]$.

* En 0. $\frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$. $\int_0 \frac{dx}{x}$ diverge

. $\frac{1}{\sin x} \geq 0$ donc $\int_0 \frac{dx}{\sin x}$ diverge.

* $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)\,dx$.

$x \longmapsto \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Deux problèmes subsistent : en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\int_0^T \sin(t)\,dt = \left[-\cos(t)\right]_0^T = 1 - \cos T.$$

$1 - \cos(T)$ n'a pas de limite lorsque T tend vers $+\infty$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t)\,dt$ diverge (et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\,dt$ aussi).