Exercice 3

Les trois fonctions $x \longmapsto \lambda e^{-\lambda x}$, $x \longmapsto x\lambda e^{-\lambda x}$, $x \longmapsto \lambda\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda x}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$. Dans les trois cas seule la convergence de l'intégrale en $+\infty$ est un problème. Soit $T>0$.

$$\int_0^T \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^T = -e^{-\lambda T} + 1 \xrightarrow[T\to+\infty]{} 1$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$ converge donc et sa valeur est 1.

$$\int_0^T x\lambda e^{-\lambda x}\,dx \underset{\text{par parties}}{=} \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^T + \int_0^T e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= -Te^{-\lambda T} - 0 + \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^T$$

$$= \underbrace{-Te^{-\lambda T}}_{\xrightarrow{T\to+\infty} 0} \underbrace{- \frac{e^{-\lambda T}}{\lambda}}_{\xrightarrow{T\to+\infty} 0} + \frac{1}{\lambda} \xrightarrow[T\to+\infty]{} \frac{1}{\lambda}$$

(croissance comparée en $+\infty$ de T et $e^{\lambda T}$)

L'intégrale $\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx$ converge donc et sa valeur est $\frac{1}{\lambda}$.

$$\int_0^T \lambda\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda x}\,dx \underset{\text{par parties}}{=} \left[-\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda x}\right]_0^T + 2\int_0^T \left(x-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}\,dx$$

à par parties aussi

$$= -\left(T-\frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda T} + \frac{1}{\lambda^2} + 2\left[-\frac{1}{\lambda}\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\right]_0^T$$

$$+ \frac{2}{\lambda}\int_0^T e^{-\lambda x}\,dx.$$

$$= -\left(T-\frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda T} + \frac{1}{\lambda^2} - 2\,\frac{1}{\lambda}\left(T-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda T} - \frac{2}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda}\left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} - \underbrace{e^{-\lambda T}\left[\left(T-\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \frac{2}{\lambda}\left(T-\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{2}{\lambda^2}\right]}_{\xrightarrow[T\to+\infty]{} 0}$$

$$\xrightarrow[T\to+\infty]{} \frac{1}{\lambda^2}$$

L'intégrale $\int_0^T \lambda\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda x}\,dx$ converge et sa valeur est $\frac{1}{\lambda^2}$.