Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,dx$.

$e^x - 1 > 0$ si $x > 0$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{e^x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Les seuls problèmes de convergence de l'intégrale sont en 0 et en $+\infty$.

<u>En 0</u> $\quad e^x - 1 \underset{0^+}{\sim} x$ donc $\dfrac{x^2}{e^x-1} \underset{0^+}{\sim} x \geqslant 0$.

et $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$ converge, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{e^x-1}\,dx$ converge

(En fait on peut prolonger la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{e^x-1}$ par continuité en 0 ; ce n'est pas vraiment une intégrale impropre en 0).

<u>En $+\infty$</u> $\quad \dfrac{x^2}{e^x-1} \underset{+\infty}{\sim} x^2 e^{-x}$

Par croissances comparées on sait que pour x suffisamment grand on a $\quad 0 \leq \dfrac{x^2}{e^x-1} \leq \dfrac{1}{x^2}$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge (critère de Riemann $2>1$)

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,dx$ converge.

Conclusion $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,dx$ converge.

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\cos x}{x(1+x)}\,dx$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1+\cos x}{x(1+x)}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Les seuls problèmes de convergence sont en 0 et $+\infty$.

En 0 $\quad$ * $\dfrac{1+\cos x}{x(1+x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{x} \geqslant 0$

* $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{x}\,dx$ diverge (critère de Riemann)

On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+\cos x}{x(1+x)}\,dx$ diverge.

Conclusion $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\cos x}{x(1+x)}\,dx$ diverge

(même s'il se trouve que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\cos x}{x(1+x)}\,dx$ converge)

Nature et valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x-1}\,dx$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{e^x-1}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Le seul problème est en $+\infty$. Soit $T>1$

$$\int_1^T \frac{1}{e^x-1}\,dx = \int_e^{e^T} \frac{1}{u-1}\,\frac{du}{u} = \int_e^{e^T} \frac{1}{u-1}\,du - \int_e^{e^T} \frac{1}{u}\,du$$

$u = e^x \quad du = e^x dx \quad dx = \dfrac{du}{u}$

$$= \Big[\ln(u-1)\Big]_e^{e^T} - \Big[\ln u\Big]_e^{e^T} = \ln(e^T-1) - \ln(e-1) - \ln(e^T) + \ln e$$

$$= \ln\Big(\underbrace{\frac{e^T-1}{e^T}}_{\xrightarrow[T\to\infty]{} 1}\Big) + 1 - \ln(e-1) \longrightarrow 1 - \ln(e-1)$$

Conclusion : L'intégrale converge et vaut $1-\ln(e-1)$