DS 3 (25 avril)

Durée 1h30, calculatrices et documents interdits

Exercice 1. (*5 points*)
On s'intéresse à l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\ dx.$$

1. Calculer l'intégrale en utilisant une primitive.
2. On écrit l'intervalle $[1,2]$ comme une réunion d'intervalles de la forme $[k/n,(k+1)/n]$. Quelles sont les plus grande et plus petite valeurs de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[k/n,(k+1)/n]$?
3. En déduire l'encadrement suivant :
$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n}.\frac{n}{k+1} \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\ dx \leq \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n}.\frac{n}{k}.$$
Faire un dessin et expliquer.
4. Donner une formule plus simple pour la différence
$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1}.$$
Faire un essai avec $n=2$, $n=3$ pour comprendre ce qui se passe.
5. Déduire des deux questions précédentes une valeur de n pour laquelle
$$0 \leq \ln 2 - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq 10^{-3}.$$

Exercice 2. (*4 points*)
Soit f la fonction définie par $f(t)=1$ si $t \in [0,1]$, $f(t)=0$ sinon. Pour tous nombres réels $a<b$, calculer $\int_a^b f(t)\ dt$.
Il faut donner la valeur de l'intégrale en fonction de a et b ; les formules obtenues dépendent des positions de a et b.

Exercice 3. (*4 points*)
Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\ dx.$$

de deux manières :

1. en faisant le changement de variable $t=\sin(x)$;
2. en linéarisant $\cos^3(x)$.

Exercice 4. (*4 points*)
Montrer que les trois intégrales suivantes convergent et les calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx,\ \int_0^{+\infty} xe^{-x}\ dx,\ \int_0^{+\infty} (x-1)^2 e^{-x}\ dx.$$

Exercice 5. (*4 points*)
Quelles sont les natures des deux intégrales généralisées suivantes

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\ dx, \qquad \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{(x+1)^2}\ dx \ ?$$