DS 1 (11 mars)

Durée 45 minutes, calculatrices et documents interdits

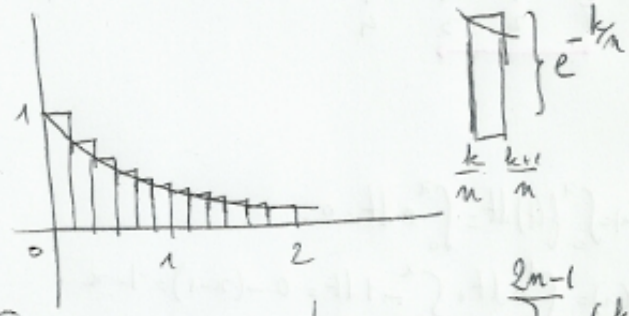
Exercice 1. Calculer

$$\int_0^2 e^{-t}\,dt$$

1. en utilisant une approximation par des fonctions en escalier constantes sur les intervalles $[k/n, (k+1)/n]$ (égales sur chacun des intervalles à la valeur de la fonction à l'extrémité gauche de l'intervalle) ; en faisant ensuite tendre n vers $+\infty$;
2. en utilisant une primitive.

1.

sur 4



Somme associée au découpage : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)e^{-k/n}$ sur 1

sur 1,5

$$= \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{n}e^{-k/n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}\left(e^{-1/n}\right)^k$$

somme des termes d'une suite géométrique.

$$= \frac{1}{n}\,\frac{1-\left(e^{-1/n}\right)^{2n}}{1-e^{-1/n}} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1-e^{-2}}{1-e^{-1/n}}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-e^{-2}$$

sur 1,5

or $\dfrac{1-e^{-1/n}}{1/n} = \dfrac{e^{-1/n}-1}{-1/n-0}$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0$ (dérivée de e^x en 0)

on trouve bien la même chose.

2. $-e^{-t}$ est une primitive de e^{-t}

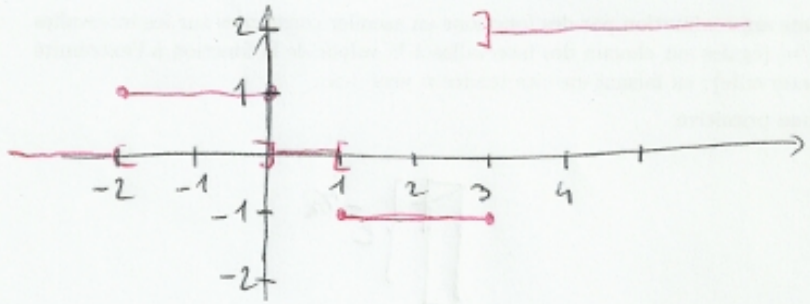
$$\int_0^2 e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^2 = -e^{-2}-(-1) = 1-e^{-2}$$

sur 1

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < -2$, $f(t) = 1$ si $t \in [-2, 0]$, $f(t) = 0$ si $t \in]0, 1[$, $f(t) = -1$ si $t \in [1, 3]$ et $f(t) = 2$ si $t > 3$.

1. Tracer le graphe de f.
2. Pour tout x réel, calculer
$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$
3. Tracer le graphe de g.

1



Am 1

2. Si $x \in]0,1[$ $g(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 0\, dt = 0$.

Si $x \in [1,3]$ $g(x) = \int_0^1 0\, dt + \int_1^x -1\, dt = 0 - (x-1) = 1-x$

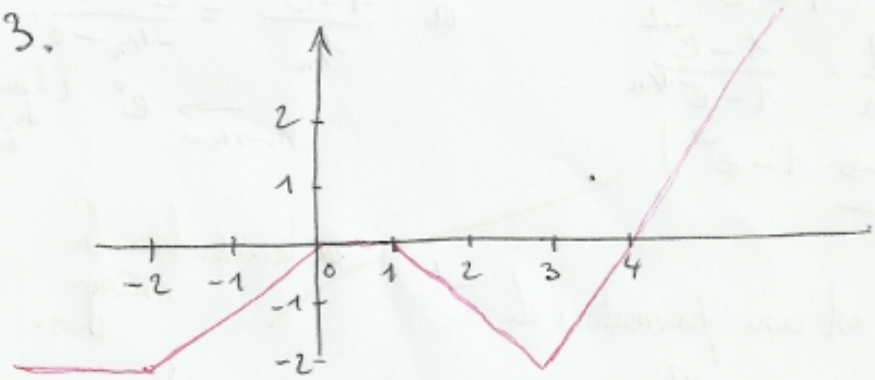
Si $x > 3$ $g(x) = \int_0^1 0\, dt + \int_1^3 -1\, dt + \int_3^x 2\, dt = 0 + (1-3) + 2x - 6 = 2x - 8$

Si $x \in [-2,0]$ $g(x) = \int_0^x 1\, dt = x$

Si $x \in]-\infty,-2[$ $g(x) = \int_0^{-2} 1\, dt + \int_{-2}^x 0\, dt = -2$

Am 3

3.



Am 1