Exercice 7

Pour Δ_n développons suivant la dernière colonne

$$\Delta_n = (-1)^{n-1} a_n \begin{vmatrix} x & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & x \end{vmatrix} + (-1)^{n-2} a_{n-1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & x \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{n-3} a_{n-2} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x\ 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & x \end{vmatrix} + (-1)^{n-4} a_{n-3} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & (*) & \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + a_1 \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ x & \ddots & \vdots \\ (0) & x & 0 \end{vmatrix}$$

Tous les déterminants sauf le premier sont nuls (car la première ligne est nulle).

$$\Delta_n = (-1)^{n-1} a_n x^{n-1}$$

Pour Γ_n développons suivant la première colonne.

$$\Gamma_n = x \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & a_1 \\ a_{n-1} & \cdots & & a_1 & x \end{vmatrix} + (-1)^n a_n \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ x & \ddots & (0) & \vdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (0) & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & x & a_1 \end{vmatrix}$$

$$= x\,\Gamma_{n-1} + (-1)^n a_n \Delta_n .$$

$$= x\,\Gamma_{n-1} + (-1)^n a_n (-1)^{n-1} a_n x^{n-1}$$

$$= x\,\Gamma_{n-1} - a_n^2\, x^{n-1}$$

$$= x\left(x\Gamma_{n-2} - a_{n-1}^2\, x^{n-2}\right) - a_n^2\, x^{n-1}$$

$$= x^2\,\Gamma_{n-2} - a_{n-1}^2\, x^{n-1} - a_n^2\, x^{n-1}$$

$$= x^2\left(x\Gamma_{n-3} - a_{n-2}^2\, x^{n-3}\right) - a_{n-1}^2\, x^{n-1} - a_n^2\, x^{n-1}$$

$$= x^3\,\Gamma_{n-3} - \left(a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 + a_n^2\right) x^{n-1}$$

$$= \cdots$$

$$= x^{n+1} - \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) x^{n-1}$$

<u>Rq</u> : Pour voir comment fonctionne le calcul il peut être intéressant de commencer par calculer Γ_1, Γ_2, Γ_3.

Exercice 14

Calculons le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = A$

$$\begin{vmatrix} X-1 & -a & -1 \\ 0 & X-1 & -b \\ 0 & 0 & X-c \end{vmatrix} = (X-1)^2(X-c).$$

On a donc deux valeurs propres : 1 et c.
(une seule si $c=1$).

Cherchons les espaces propres associés : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A-I)$

si $\begin{cases} x+ay+z = x \\ y+bz = y \\ cz = z \end{cases}$ $\begin{cases} ay+z=0 \\ bz=0 \\ (c-1)z=0. \end{cases}$

Le système est déjà échelonné.

<u>Si $c=1$</u> le système est équivalent à $\begin{cases} ay+z=0 \\ bz=0 \end{cases}$

Si $\underline{b=0}$ $\underline{a=0}$: $\ker(A-I) = \{{}^t(x,y,0) \,/\, (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

$\dim\ker(A-I) = 2 < 3$

la matrice n'est pas diagonalisable

Si $\underline{b=0}$ $\underline{a\neq 0}$. $\ker(A-I) = \{{}^t(x,y,-ay) \,/\, (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

$\dim\ker(A-I) = 2 < 3$

Si $\underline{b\neq 0}$ $\underline{a=0}$ $\ker(A-I) = \{{}^t(x,y,0) \,/\, (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

$\dim\ker(A-I) = 2 < 3$.

Si $b \neq 0$, $a \neq 0$ $\quad \ker(A-I) = \{ {}^t(x,0,0) \,/\, x \in \mathbb{R} \}$

$\dim \ker(A-I) = 1 < 3$.

Conclusion si ~~b~~ $\underline{c=1}$ la matrice A n'est pas diagonalisable.

<u>Rq</u> : autre argument. Si $c=1$, l'unique valeur propre est 1. Si la matrice est diagonalisable elle est égale à l'identité. Or $A \neq I$ car $A_{13} = 1$. donc A n'est pas diagonalisable.

<u>Si $c \neq 1$</u> $\quad \ker(A-I) = \{ {}^t(x,y,0) \,/\, \overset{x \in \mathbb{R}}{ay = 0} \}$.

Si $\underline{a \neq 0}$ $\quad \ker(A-I) = \{ {}^t(x,0,0) \,/\, x \in \mathbb{R} \}$.

$\dim \ker(A-I) = 1$

Si $a = 0$ $\quad \ker(A-I) = \{ {}^t(x,y,0) \,/\, x, y \in \mathbb{R} \}$.

$\dim \ker(A-I) = 2$.

~~Ker~~ Le sous espace propre associé à c est

$\ker(A - cI) = \{ {}^t(x,y,z) \,/\, A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \}$.

c'est l'ensemble des solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{r} x + ay + z = cx \\ y + bz = cy \\ cz = cz \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} (1-c)x + ay + z = 0 \\ (1-c)y + bz = 0 \end{array} \right.$$

On peut fixer z arbitrairement
x et y sont alors déterminés.

$\dim \ker(A - cI) = 1$

Conclusion :

si $c=1$ .. A n'est pas diagonalisable (déjà dit)

si $c \neq 1$ et $a \neq 0$ A n'est pas diagonalisable
(car $\dim \ker(A-I) + \dim \ker(A-cI) = 1+1=2 < 3$)

si $c \neq 1$ et $a=0$ A est diagonalisable.
(car $\dim \ker(A-I) + \dim \ker(A-cI) = 2+1=3$)

On procède de la même façon pour la deuxième matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Rq : Ce n'est pas dans le cours mais une matrice symétrique est diagonalisable. (voir le semestre prochain)

$$\begin{vmatrix} X & 0 & -a \\ 0 & X & -b \\ -a & -b & X-c \end{vmatrix} = X^2(X-c) - a^2X - b^2X$$

$$= X\left(X(X-c) - a^2 - b^2\right)$$

$$= X\left(\underbrace{X^2 - cX - (a^2+b^2)}\right)$$

$$\Delta = c^2 + 4(a^2+b^2) > 0.$$

Les valeurs propres de B sont 0, $\dfrac{c \pm \sqrt{c^2+4(a^2+b^2)}}{2}$

Si $(a,b) \neq (0,0)$ B a donc trois valeurs propres distinctes et est diagonalisable.

Si $(a,b) = (0,0)$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

elle est diagonalisable puisque diagonale !