Exercice 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 + 6 - 27 - 1 = -16$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 10 & 14 & 22 \\ 0 & 21 & 33 \end{vmatrix} = 5 \times 7 \times 11 \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} C1 & C2 & C3 \end{matrix} \end{array}$$

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 11 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= 5 \times 7 \times 11 \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} C1 & C2-C1 & C3-C2 \end{matrix} \end{array}$$

$$= 5 \times 7 \times 11 \times (-2) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \times 7 \times 11 \times (-2) \times 3$$

$$= -2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

$$\begin{vmatrix} x & y & x & y \\ 0 & x & y & x \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^4 \quad \text{(matrice triangulaire)}$$

Exercice 5

Dire que A est antisymétrique est dire qu'on a :

$$^tA = -A.$$

Prenons le déterminant. On a

$$\det({}^tA) = \det(-A).$$

Or $\det({}^tA) = \det(A)$ et $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$

On en déduit

$$\det(A) = (-1)^n \det(A).$$

Cette égalité n'a aucun intérêt si n est pair ($\det(A) = \det(A)$) mais si n est impair on a

$$\det(A) = -\det(A)$$

si n est impair. $(-1)^n = -1$

ou encore $2\det(A) = 0$

soit $\det(A) = 0$.