Feuille 3

Correction Ex 10

1] a) On échelonne la matrice dont les lignes sont formées par les v_i

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & -9 & -5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -9 & -5 \\ 0 & 2 & -9 & -5 \\ 0 & 2 & -9 & -5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} v_1 \\ v_2' = v_2 - 3v_1 \\ v_3' = v_3 - v_1 \\ v_4 \end{array}\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} v_1 \\ v_2' \\ v_3' - v_2' \\ v_4 - v_2' \end{array}\end{array}$$

La matrice est de rang $\dim F = 2$ (= nombre de pivots) et une base est donnée par $v_1 = (1, -1, 3, 2)$, $v_2' = (0, 2, -9, -5)$; (les lignes contenant les pivots). (v_1, v_2) convient aussi.

b) $\dim \mathbb{R}^4 - \dim F = 4 - 2 = 2$; F est alors défini par 2 équations cartésiennes de la forme $\begin{cases} f_1(x,y,z,t) = 0 \\ f_2(x,y,z,t) = 0 \end{cases}$

où f_1, f_2 sont 2 formes linéaires indépendantes.

Puisqu'une forme linéaire s'écrit $f(x,y,z,t) = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 t$, on doit résoudre

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + 3a_3 + 2a_4 = 0 & (f(v_1) = 0) \\ 2a_2 - 9a_3 - 5a_4 = 0 & (f(v_2') = 0) \end{cases}$$

Soit $\begin{cases} a_1 = a_2 - 3a_3 - 2a_4 = \frac{3}{2} a_3 + \frac{a_4}{2} \\ a_2 = \frac{9}{2} a_3 + 5/2\, a_4 \end{cases}$

(a_3, a_4 sont les variables libres)

on obtient donc $f(x,y,z,t) = a_3\left(3/2\, x + \frac{9}{2} y + z\right) + a_4\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{2} y + t\right)$

on obtient finalement que F est défini par les deux équations

$\begin{cases} 3/2\, x + 9/2\, y + z = 0 \\ x/2 + 5/2\, y + t = 0 \end{cases}$ correspondants à $(a_3, a_4) = (1,0)$ et $(a_3, a_4) = (0,1)$

ou encore $\begin{cases} 3x + 9y + 2z = 0 \\ x + 5y + 2t = 0 \end{cases}$

2] G s.e.v : calcul direct ou remarquer que $G = \ker f$ où $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \to x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4$

est linéaire.

De plus $G = \{ (x_2 - 2x_3 + 4x_4, x_2, x_3, x_4)$ où $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$

$= \{ x_2 \underbrace{(1,1,0,0)}_{v_1} + x_3 \underbrace{(-2,0,1,0)}_{v_2} + x_4 \underbrace{(4,0,0,1)}_{v_3} \}$

$= \mathrm{vect}(v_1, v_2, v_3)$ (ce qui remontre au passage que G est bien un s.e.v !)

Par ailleurs (v_1, v_2, v_3) est libre (facile à vérifier) et donc une base de G

2] Un vecteur v appartient à l'intersection si et seulement si il existe $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ tel que

$$v = x_1(1,3,0) + x_2(2,3,-3) = x_3(1,1,-3) + x_4(1,4,3)$$

Ce qui revient à résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

En appliquant G.J, on trouve

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$

(x_4 est une variable libre)

$x_4 u$ où $u = (3,6,-3)$

D'où $v = x_4\underbrace{\left[(1,3,0) + (2,3,-3)\right]}_{\parallel}$, $x_4 \in \mathbb{R}$

Le s.e.v considéré en 2] est donc de dimension 1 (ce qui est attendu puisque c'est l'intersection de 2 plans !) et admet u (ou encore $\frac{u}{3} = (1,2,-1)$) comme base.

On peut compléter par $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ pour avoir une base de $\mathbb{R}^3$. ($\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang = 3).

3] Le s.e.v est formé des vecteurs

$$v = x_2\left(-\tfrac{1}{2}, 1, 0\right) + x_3\left(-\tfrac{1}{2}, 0, 1\right) \quad \text{(comme en 10.2)}$$

donc égal à $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ où $\begin{cases} v_1 = (1,-2,0) \\ v_2 = (1,0,2) \end{cases}$

En particulier $\dim_{\mathbb{R}} G = 3$

Rque : On peut aussi noter qu'en appliquant le théorème du rang à f, on obtient $\dim G = 3$. La famille génératrice (v_1, v_2, v_3) est donc aussi une base de G.

3] $F \subset G$: en effet, $F = \text{vect}(v_1, v_2')$ et les coordonnées de v_1 satisfont l'équation $x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0$ $(1 + 1 + 6 - 8 = 0)$ ainsi que celles de v_2'.

$F \neq G$ car $\dim F = 2 \neq \dim G = 3$

~~Ex~~ Correction Ex ~~10~~

Comme en 10) a) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3' = v_3 - 2v_1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3' + 2v_2 \end{matrix}$$

(v_1, v_2) forme donc une base de F et on peut la compléter par $e_3 = (0, 0, 1)$ pour avoir une base de $\mathbb{R}^3$ car la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3

On peut échelonner :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2' \end{array}$$

$\to$ base donnée par $\big((1,-2,0), (0,1,1)\big)$.

On complète par $e_3 = (0,0,1)$ pour avoir une base de $\mathbb{R}^3$ $\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est de rang } = 3 \right)$.