Exercice 23

1) Trouver les vecteurs de coordonnées (x, y, z) dans la base (e_1, e_2, e_3) c'est résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$\uparrow$ immobile ; ne bougera pas.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le vecteur $xe_1 + ye_2 + ze_3$ appartient à $\ker f$ si

$y = \frac{2}{3} z$ et $x = \frac{1}{3} z$

Une base de $\ker f$ (de dimension 1) est donnée par

$e_1 + 2e_2 + 3e_3$ (obtenu pour $z=3$).

2) Pour montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E il suffit de montrer que la matrice obtenue en plaçant les coordonnées de v_1, v_2, v_3 dans la base e_1, e_2, e_3 en colonne est de rang 3.

$$\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array}
\end{array}$$

Pour trouver le rang de cette matrice, appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trois pivots

Conclusion : la matrice est bien de rang 3 et (v_1, v_2, v_3) est bien une base de E

Pour trouver la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) il faut calculer $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ puis trouver leurs coordonnées dans la base (v_1, v_2, v_3)

On a vu que $f(v_1) = 0$. (question 1)

$f(v_2)$ a pour coordonnées (dans la base (e_1, e_2, e_3))

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $f(v_2) = -v_2$.

$f(v_3)$ a pour coordonnées (dans la base (e_1, e_2, e_3))

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On remarque que $f(v_3) = -v_3$.

Finalement
$$\begin{aligned} f(v_1) &= 0\,v_1 + 0\,v_2 + 0\,v_3 \\ f(v_2) &= 0\,v_1 - v_2 + 0\,v_3 \\ f(v_3) &= 0\,v_1 + 0\,v_2 - v_3 \end{aligned}$$

La matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. La matrice de $f \circ f$ dans cette base (v_1, v_2, v_3)

est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C'est l'opposé de la matrice de f. (dans la même base)

Conclusion : $f \circ f = -f$

Remarque : on peut aussi le faire dans la base (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$