Exercice 20

1) Pour trouver la matrice de f dans la base canonique on calcule les images des vecteurs de la base canonique :

$$f(1,0,0) = (1,2,1) \qquad f(0,1,0) = (1,-1,0)$$

$$f(0,0,1) = (0,1,1)$$

puis on écrit en colonne les coordonnées des vecteurs obtenus :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Pour montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de montrer que la matrice 3×3 obtenue en plaçant les coordonnées de v_1, v_2, v_3 en colonne est de rang 3. (En effet cela montre que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ est de dimension 3 donc égal à $\mathbb{R}^3$, ce qui signifie que (v_1, v_2, v_3) est génératrice ; mais une famille de 3 vecteurs génératrice de $\mathbb{R}^3$ est aussi libre et est une base)

Pour connaître le rang de

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : la forme réduite échelonnée de la matrice de départ est de rang 3. (3 pivots)

C'est donc aussi le cas de $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

et (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

Pour trouver la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) on calcule les images de $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ et les coordonnées de ces images dans la base (v_1, v_2, v_3)

$$f(v_1) = (3, 2, 1) \qquad f(v_2) = (1, 7, 4)$$

$$f(v_3) = (3, 7, 4)$$

Trouver les coordonnées de $f(v_1)$ dans la base (v_1, v_2, v_3) c'est trouver α, β, γ tq

$$f(v_1) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 .$$

ce qui est la même chose que résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 3\gamma = 3 \\ \alpha - \beta + 0\gamma = 2 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

Encore une fois nous allons appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan.

Pour trouver les coordonnées de $f(v_2)$ et $f(v_3)$ dans la base (v_1, v_2, v_3) on doit résoudre deux autres systèmes qui sont obtenus en changeant le deuxième membre. On peut résoudre les trois systèmes en même temps

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 7 & 7 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & -13 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 11 & 11 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 11 & 11 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & -13 & -11 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 5 & 18 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -13 & -57 & -55 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -39 & -37 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & -46 & -44 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 57 & 55 \end{array}\right)$$

coordonnées de $f(v_1)$ dans la base (v_1, v_2, v_3)

de $f(v_2)$

de $f(v_3)$

La matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) est

$$\begin{pmatrix} -8 & -39 & -37 \\ -10 & -46 & -44 \\ 13 & 57 & 55 \end{pmatrix}$$

Remarque : Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \end{array}$

$$AP = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} AV_1 & AV_2 & AV_3 \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \end{array}$$

Résoudre $\begin{array}{cc} P & AP \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 7 & 7 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$

c'est calculer

$$P^{-1}AP$$