Exercice 11 (Feuille 2)

1. Je commence par donner une réponse détaillée un peu longue. Je donne aussi ensuite une réponse beaucoup plus rapide. D'autres formulations sont possibles.

* Ecrivons les coordonnées de u_1, u_2, u_3 dans la base canonique en colonne. On obtient trois vecteurs colonne C_1, C_2, C_3.

Appelons A la matrice dont les colonnes sont C_1, C_2, C_3

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \quad \text{matrice } 3\times 3$$

Dire que (u_1, u_2, u_3) est un système générateur signifie que tout vecteur v s'écrit comme une combinaison linéaire des u_i.

$$\underset{\mathbb{R}^3}{\forall v} \quad \underset{\mathbb{R}}{\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} \quad v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \quad (*)$$

Si Y est le vecteur colonne des coordonnées de v, l'égalité $(*)$ s'écrit matriciellement $\quad Y = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3$

Or $\quad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

On en déduit que dire que (u_1, u_2, u_3) est générateur revient à dire que pour tout $Y \in \mathbb{R}^3$ il existe $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ tq $AX = Y$.

Comme on l'a vu en cours c'est équivalent à dire que A

est inversible et c'est aussi équivalent à dire que $AX=0 \Rightarrow X=0$

Si on traduit cette implication en posant $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ on obtient

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

soit, en revenant à u_1, u_2, u_3,

$$\lambda u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

C'est dire que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

* Deuxième formulation.

$\mathbb{R}^3$ est de dimension 3.

(u_1, u_2, u_3) est un système générateur à 3 éléments.

c'est donc une base, donc une famille libre.

2. et 3. Oui, car si une famille est génératrice toute famille la contenant est encore génératrice.

4. Non. $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. Toute famille ayant plus de deux éléments est liée.

(strictement)