Ex 10

1

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dire que u_1, u_2, u_3 engendrent $\mathbb{R}^3$ c'est dire que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme une combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 \quad \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \quad tq \quad v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \quad (E)$$

Si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ l'égalité (E) s'écrit.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = y \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = z \end{cases}$$

c'est un système linéaire résolvons-le avec la méthode de Gauss Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x \\ 0 & -1 & -1 & y-x \\ 0 & -1 & 0 & z-x \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x-2(x-z) \\ 0 & 1 & 0 & x-z \\ 0 & 0 & 1 & z-y \end{array}\right) \longleftarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x \\ 0 & 1 & 0 & x-z \\ 0 & 1 & 1 & x-y \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x-2x+2z-2z+2y \\ 0 & 1 & 0 & x-z \\ 0 & 0 & 1 & z-y \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2y-x \\ 0 & 1 & 0 & x-z \\ 0 & 0 & 1 & z-y \end{array}\right)$$

Conclusion $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ s'écrit bien comme combinaison linéaire

de u_1, u_2, u_3

$$v = (2y - x)\, u_1 + (x - z)\, u_2 + (z - y)\, u_3$$

Les vecteurs u_1, u_2, u_3 engendrent bien $\mathbb{R}^3$.

2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3 Appelons C_i le vecteur colonne des coordonnées de v_i et A la matrice 3×3 dont les colonnes sont C_1, C_2, C_3

Comme on l'a vu en cours dire que les C_i engendrent $\mathbb{R}^3$ revient à dire que A est inversible ou encore à dire que $(AX = 0 \Rightarrow X = 0)$.

Supposons v_1, v_2, v_3 n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$. Il existe ~~donc~~ alors $X \neq 0$ tq $AX = 0$.

Prenons $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \neq 0$ un tel X. On a $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0$

soit encore $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ $\quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$

Comme $v_3 \notin \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ $\lambda_3 = 0$ $\left(\text{sinon } v_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} v_2\right)$

Contradiction car par hyp v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires