Exercice 1 (Feuille 3)

On a une famille de 4 vecteurs dans un espace, $\mathbb{R}^3$, de dimension 3. La famille est nécessairement liée.

Trouver une relation de dépendance linéaire entre les u_i c'est trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0$$

Cette égalité s'écrit sous la forme du système linéaire suivant

$$\begin{cases} 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

On le résout en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \nearrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & 11 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & -4 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -7/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 4 & 37/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -7/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 37/12 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 37/12 \end{pmatrix}$$

Comme prévu, le système a une infinité de solutions (une autre façon de le prévoir était de remarquer qu'on a moins d'$\underset{3}{\text{équations}}$ que d'$\underset{4}{\text{inconnues}}$ avec un système forcément compatible car homogène).

On peut fixer arbitrairement λ_4 et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont alors donnés par

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_1 = -\frac{3}{4}\lambda_4 \\ \lambda_2 = -\lambda_4/3 \\ \lambda_3 = -\frac{37}{12}\lambda_4 \end{array} \right.$$

Par exemple on peut prendre $\lambda_4 = -12$

$\lambda_1 = +9 \quad \lambda_2 = +4$

$\lambda_3 = +37$

$$9u_1 + 4u_2 + 37u_3 - 12u_4 = 0.$$