Feuille 3

Exercice 1. Soient $u_1 = (3, 1, -1)$, $u_2 = (-1, 1, 2)$, $u_3 = (1, -1, 1)$ et $u_4 = (5, -2, 3)$. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ? Si oui, démontrez le, sinon, écrivez une relation de liaison.

Exercice 2. Les familles suivantes sont-elles libres ? Et/ou génératrices ?

1. $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 2, 2)$, $u_3 = (3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$
2. $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$
3. $w_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $w_2 = (2, 1, 2, 1, 2)$, $w_3 = (1, 0, 1, 1, 0)$, $w_4 = (0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 0, -3, -1)$, $v_3 = (-2, -4, 2, 1)$ et $v_4 = (3, 6, 0, 2)$.

1. Les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 appartiennent-ils au sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y = 2x\}$
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?
3. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?
4. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
5. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^4$, soient $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, -1)$, et $v_4 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

1. Vérifier qu'ils appartiennent au sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$.
2. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?
3. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$? De F ?
4. Cette famille forme-t-elle une base de F ?

Exercice 5. Dans $\mathbb{C}^3$, on considère la famille des trois vecteurs $u_1 = (1, -1, i)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ et $u_3 = (i, 1, -1)$. Cette famille est-elle libre ? Génératrice ? Si oui, écrire les coordonnées de $v = (1+i, 1-i, i)$ dans la base u_1, u_2, u_3.

Exercice 6. Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + z = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. En donner des familles génératrices.
3. Est-ce encore vrai pour l'ensemble $\mathcal{T}$ des solutions de l'équation $x - y + z = 1$?

Exercice 7. Soient $u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (2, -1, 1)$, $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (2, -1, 1)$. Montrer que le sous-espace engendré par u_1 et u_2 coincide avec le sous-espace vectoriel engendré par v_1 et v_2, de deux manières.

1. En écrivant u_1 et u_2 chacun comme combinaison linéaire de v_1 et v_2.
2. En trouvant des équations pour chacun de ces deux sous-espaces.
3. Soient P_1 le plan paramétré par $P_1 = \{(\lambda, \mu, \lambda + \mu), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ et $P_2 = \{(\lambda + 2\mu, 2\lambda - \mu, 3\lambda + \mu), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Comparer ces deux plans.

Exercice 8. Montrer que les vecteurs $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (-1, 1, 0)$, et $f_3 = (1, 0, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire chacun des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, et $e_3 = (0, 0, 1)$ comme combinaison linéaire de f_1, f_2, f_3.

Exercice 9. Dans l'espace $\mathbf{C}^3$, vérifier que les vecteurs

$$u_1 = (1, -1, i), \quad u_2 = (1, -1, 1) \quad \text{et} \quad u_3 = (i, 1, -1)$$

forment une base et calculer les coordonnées de $v = (1 + i, 1 - i, i)$ dans la base (u_1, u_2, u_3).

Exercice 10. 1. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par

$$v_1 = (1, -1, 3, 2), \quad v_2 = (3, -1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, -6, -3) \quad \text{et} \quad v_4 = (0, 2, -9, -5).$$

(a) Déterminer la dimension de F et en donner une base.

(b) Donner un système d'équations cartésiennes de F.

2. Soit
$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}.$$
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et donner une base de G.

3. Montrer que $F \subset G$. A-t-on $F = G$?

Exercice 11. Déterminer une base sur $\mathbf{R}$ pour les sous-espaces vectoriels suivants, et la compléter en une base de tout l'espace.

1. $\mathrm{Vect}((1,2,1),(0,1,3),(2,2,-4)) \subset \mathbf{R}^3$
2. $\mathrm{Vect}((1,3,0),(2,3,-3)) \cap \mathrm{Vect}((1,1,-3),(1,4,3)) \subset \mathbf{R}^3$
3. $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbf{R}^3$

Exercice 12. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, donner une base de F et sa dimension dans les cas suivants :

1. $F = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n | x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$
2. $F = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n | x_1 + x_n = x_2 + x_n = \ldots + x_n = x_{n-1} + x_n = 0\}$

Exercice 13. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 10 & 14 & 22 \\ 0 & 21 & 33 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} x & y & x & y \\ 0 & x & y & x \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$

Exercice 15. Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2+A+I = 0$. Calculer $\det A$. Même question avec $A^2-A+I = 0$.

Exercice 16. Montrer que si n est impair, il n'existe pas de $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 + I = 0$. Même question avec $A^2 - \sqrt{2}A + I = 0$.

Exercice 17. Montrer que si n est impair et $A \in M_n(\mathbf{R})$ antisymétrique, alors $\det A = 0$.

Exercice 18. Inverser les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19. Calculer pour tout $n \geq 2$

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ x & \ddots & & \vdots & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & a_1 \end{vmatrix} \quad \text{puis} \quad \Gamma_n := \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & a_1 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_1 & x \end{vmatrix}.$$

Exercice 20. Montrer que si $P \in \mathbf{R}[X]$ est tel que $\deg P < n$, et

$$A = \begin{bmatrix} P(x) & P(x+1) & \cdots & P(x+n) \\ P(x+1) & P(x+2) & \cdots & P(x+n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(x+n) & p(x+n+1) & \cdots & P(x+2n) \end{bmatrix},$$

alors $\det A = 0$. Calculer $\det B$ avec

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & \cdots & n^2 \\ 1 & 4 & 9 & \cdots & (n+1)^2 \\ 4 & 9 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \cdots & \cdots & (2n)^2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 21. Calculer les valeurs propres des matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 22. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $a \neq b$ fixés. Montrer que

$$\Delta(X) := \begin{vmatrix} \lambda_1 + X & b+X & \cdots & b+X \\ a+X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+X \\ a+X & \cdots & a+X & \lambda_n + X \end{vmatrix}$$

est un polynôme de degré au plus 1, calculer $\Delta(-a)$ et $\Delta(-b)$ et en déduire $\Delta = \Delta(0)$.

Exercice 23. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, et V le vecteur $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Calculer le produit AV. Déteminer les valeurs propres de V ainsi que des vecteurs propres associés. Pourquoi peut-on choisir des vecteurs propres formant une base orthonormée ? Quelle propriété intéressante a alors la matrice de passage ? En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 24. Lorsque c'est possible, diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 25. Pour quelles valeurs de a, b et c les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

Exercice 26. La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?

Exercice 27. Soient a un réel et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice A par rapport à la base canonique est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A. Pour quelles valeurs du paramètre a le noyau de f n'est-il pas réduit à $\{0\}$? Justifier.
2. Montrer que le polynôme caractéristique P de f vérifie $P = (X-3)Q$, où Q est un polynôme que l'on déterminera. Pour quelles valeurs de a le nombre 3 est-il racine multiple de P ?
3. Déterminer, en fonction de a, les valeurs propres de f, leurs multiplicités et la dimension des sous espaces propres associés. Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice 28. Diagonaliser la matrice A suivante et calculer A^n :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 29. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \alpha & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & \beta & \beta \\ 3 & 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 3 & 0 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

où α et β sont des paramètres.

Exercice 30. Soit $A = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ où a et b désignent deux réels.

1. Montrer qu'on a $2 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$.
2. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\operatorname{rg} A = 2$?

Exercice 31. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soient $v_1 = (1,-1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (-1,1,2)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$.
3. En déduire que f est une symétrie par rapport à un plan vectoriel que l'on déterminera.

Exercice 32. Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par $f(x,y,z,t) = (X,Y,Z)$ avec $X = x-y+z+t, Y = x+2z-t, Z = x+y+3z-3t$.

1. Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques ?

2. Montrer que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathrm{im} f$ et la compléter en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$.
3. Montrer que $\ker f$ est de dimension 2 et donner une base (u_1, u_2) de $\ker f$.
4. Vérifier que (e_1, e_2, u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^4$. Quelle est la matrice de f dans les bases (e_1, e_2, u_1, u_2) et $\mathcal{B}$?

Exercice 33. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soient $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$ et $\varepsilon_2 = (1, 2, 1)$.

1. Vérifier que les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et e_1 forment une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Soit f l'application linéaire définie de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ par $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$, $\quad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \quad$ et $\quad f(e_1) = e_1 + e_2$. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
3. Calculer la matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_1)$.

Exercice 34. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z, x + z)$.

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
2. Montrer que les vecteurs $v_1 = (2, 1, -1)$, $v_2 = (2, -1, 2)$ et $v_3 = (3, 0, 1)$ forment une base de $\mathbf{R}^3$. Donner la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 35. Considérons l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$; notons $(e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique et v le vecteur défini par $v = e_1 + \ldots + e_n$. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'application linéaire définie, pour $i = 1, \ldots, n$, par $f(e_i) = e_i + v$.

1. Montrer que tout vecteur de $\ker f$ est colinéaire à v et, en fait, égal à 0.
2. Montrer que f est un isomorphisme.
3. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Exercice 36. Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + 4z)$.

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
2. Considérons les vecteurs $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 1, 2)$ et $v_3 = (2, 1, 5)$ de $\mathbf{R}^3$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 37. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. Notons $f : E \to E$ l'application linéaire dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.

1. Trouver une base de $\ker f$.
2. Posons $v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v_2 = e_2 + e_3$ et $v_3 = e_1 + 2e_3$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E. Calculer la matrice de f dans cette base.
3. En déduire que l'on a $f \circ f = -f$.

Exercice 38. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'unique application linéaire qui vérifie $f(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3$, $f(e_2) = -2e_1 + 2e_3$ et $f(e_3) = -4e_1 + e_2 + 4e_3$.

1. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Donner une base de $\mathrm{im} f$ et une équation de $\mathrm{im} f$.
3. Pour quelles valeurs du paramètre réel t l'application linéaire $f - t\mathrm{Id}$ est-elle un isomorphisme ?
4. Trouver une base v_1 de $\ker(f - 3\mathrm{Id})$ et une base v_2 de $\ker f$. Montrer que les vecteurs v_1 et v_2 sont linéairement indépendants. Trouver v_3 dans $\mathbf{R}^3$ tel que (v_1, v_2, v_3) soit une base de $\mathbf{R}^3$. Quelle est la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) ?

Exercice 39. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Notons f l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Écrire la matrice de f dans la base (e_3, e_2, e_1).

2. Écrire la matrice de f dans la base $(e_1 + e_3, e_3, e_2 - e_3)$.

Exercice 40. Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), on considère l'endomorphisme u défini par $u(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3$, $u(e_2) = e_1 - e_2$ et $u(e_3) = e_2 - e_3$.

1. Écrire la matrice M de u dans la base canonique. Calculer M^2 et vérifier que $M^3 = 0$.
2. Déterminer $\ker u$, $\ker u^2$, $\mathrm{im} u$, $\mathrm{im} u^2$ et donner les relations d'inclusion entre ces sous-espaces.
3. On pose $e'_1 = u^2(e_1), e'_2 = -u(e_3), e'_3 = e_3$. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbf{R}^3$. Donner la matrice N de u dans cette base.
4. Soit S la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e'_1, e'_2, e'_3). Calculer S^2 et en déduire S^{-1}. Vérifier que $S^{-1}MS = N$.

Les quatre exercices suivants (pris ensemble) formaient l'énoncé d'un devoir en 2021.

Exercice 41. On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que A est la matrice d'une projection.
2. Quelles sont les valeurs propres de A ?

Exercice 42. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice B suivante, en développant suivant la **deuxième** colonne :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Écrivez tous les calculs, dites quelles règles vous appliquez et donnez le résultat sous forme développée.

Exercice 43. Trouver les valeurs propres de la matrice suivante et des vecteurs propres associés :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 44. Quel est le déterminant de $-I_n$ (où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$) ? Montrer que si n est impair, il n'existe pas de $M \in M_n(\mathbf{R})$ (matrice carrée $n \times n$) telle que $M^2 + I_n = 0$.