Feuille 2

Exercice 1. On considère le système d'équations suivant :

$$3x_1 + x_2 = y_1$$
$$x_1 - x_2 = y_2$$

Exprimer y_1 et y_2 en fonction de x_1 et x_2. En déduire l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant les opérations sur les lignes. Recommencer avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Considérons les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier qu'on a $B = A + 4I_3$.
2. Trouver une formule liant B et B^2.
3. Trouver une relation entre A, A^2 et I_3.
4. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 4. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour un entier n quelconque. Faire la même chose avec le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ à la place du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire des deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. En déduire $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis l'expression de A^n.

Exercice 5. Justifier que les ensembles suivants ne sont pas des espaces vectoriels
1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; xy = 0\}$,
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x = 1\}$,
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0\}$.

Exercice 6. Peut-on trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \\ t \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} \\ 4t \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

soient colinéaires ?

Exercice 7. On considère les deux sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z=0\} \text{ et } G = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}.$$

Montrer que $F \cap G = 0$ et $F + G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 8. Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels $F \cap G = \{0\}$. Montrer que si un élément x de E s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G alors cette écriture est unique.

Exercice 9.

1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

$$\begin{aligned}
f_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto (2x+y, 3x-y) \in \mathbb{R}^2, \\
f_2 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (xy, 2x, y) \in \mathbb{R}^3 \\
f_3 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (x+y, y+z, z+x) \in \mathbb{R}^3 \\
f_4 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto (x+2y, 2x+y, x+y) \in \mathbb{R}^3 \\
f_5 : (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 &\mapsto (x-t, y-t, t, x+y+z, x+y+z+t) \in \mathbb{R}^4
\end{aligned}$$

2. Pour celles qui sont linéaires, calculer leur noyau $\ker f_i$ et leur image Imf_i. En déduire si elles sont injectives, surjectives, bijectives, ou pas.

Exercice 10. Soient $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et

$$\begin{aligned}
\psi : M_2(\mathbf{R}) &\to M_2(\mathbf{R}) \\
M &\mapsto AM - MA
\end{aligned}$$

1. Montrer que ψ est linéaire. Calculer $\psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$. Déterminer une base de $\ker\psi$ et une base de $\mathrm{im}\psi$.
2. Donner la matrice K de ψ dans la base canonique de $M_2(\mathbf{R})$.

Exercice 11. Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et

$$\varphi : M \mapsto AM$$

pour M de taille 2×3.

1. Dans quel espace vectoriel φ prend-elle ses valeurs ? Montrer que φ est linéaire.
2. Donner la matrice B de φ dans la base canonique de $M_{2,3}(\mathbf{R})$ et celle de l'espace d'arrivée.

Exercice 12. Sur une feuille de papier quadrillée, dessiner trois vecteurs dont les extrémités sont des sommets du quadrillage, puis trouver une relation de dépendance linéaire entre eux.

Exercice 13.

1. Les trois vecteurs suivants engendrent-ils $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

2. Donner un exemple de famille de 3 vecteurs non colinéaires deux à deux n'engendrant pas $\mathbb{R}^3$.
3. Soient v_1 et v_2 deux vecteurs non colinéaires. Montrer que si v_3 n'appartient pas à $Vect(v_1, v_2)$ alors v_1, v_2, v_3 engendrent $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14.

1. Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^3$. La famille (u_1, u_3) est-elle libre ?
2. Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^3$ et $v \in \mathbb{R}^3$. La famille (u_1, u_2, u_3, v) est-elle génératrice ?
3. Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^2$. La famille (u_1, u_2, u_3, v) est-elle génératrice ?
4. Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^2$. La famille (u_1, u_2, u_3, v) est-elle libre ?