DS 3 (15 décembre)
Durée : une heure trente
Documents et calculatrices interdits

Les indications en rouge ci-dessous sont parfois trop succinctes pour constituer une réponse attendue à l'énoncé. Par exemple : la réponse à la troisième question de l'exercice 1 doit présenter une résolution complète du système linéaire évoqué ; la réponse donnée à l'exercice 5 est évidemment trop lapidaire.

Exercice 1.

1. Quand dit-on qu'une famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) est libre dans un espace vectoriel E ?
   Une famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) est libre si aucun des trois vecteurs ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des deux autres, ou bien si l'égalité $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0$ où les a_i sont des nombres réels entraîne $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
2. Quand dit-on qu'une famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) est génératrice dans E ?
   Une famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) est génératrice dans E si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3.
3. Soient $u_1 = (1, 1, -1, 2)$, $u_2 = (-1, 2, 2, 1)$, $u_3 = (1, -1, -1, 0)$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^4$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?
   L'égalité $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0$ est équivalente au système linéaire d'inconnues a_1, a_2, a_3 :
   $$a_1 - a_2 + a_3 = 0,\ -a_1 + 2a_2 - a_3 = 0,\ -a_1 + 2a_2 - a_3 = 0,\ 2a_1 + a_2 = 0.$$
   On résout ce sytème. Il a pour unique solution $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. La famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
4. La (même) famille (u_1, u_2, u_3) est-elle génératrice dans $\mathbf{R}^4$?
   Non, car elle est composée de trois vecteurs alors que $\mathbf{R}^4$ est de dimension 4.
5. Donner une équation ou un système d'équations de $Vect(u_1, u_2, u_3)$.
   On chercher une condition sur x, y, z, t pour que le sytème (d'inconnues a_1, a_2, a_3)
   $$a_1 - a_2 + a_3 = x,\ -a_1 + 2a_2 - a_3 = y,\ -a_1 + 2a_2 - a_3 = z,\ 2a_1 + a_2 = t.$$
   ait une solution. Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan :
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 1 & 2 & -1 & y \\ -1 & 2 & -1 & z \\ 2 & 1 & 0 & t \end{array}\right)$$
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 3 & -2 & y-x \\ 0 & 1 & 0 & z+x \\ 0 & 3 & -2 & t-2x \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & z+x \\ 0 & 3 & -2 & y-x \\ 0 & 3 & -2 & t-2x \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & z+x \\ 0 & 0 & -2 & y-4x-3z \\ 0 & 0 & 0 & t-x-y \end{array}\right)$$

Le système n'a des solutions que si $t-x-y=0$: c'est l'équation recherchée.

Exercice 2. On considère F le sous-ensemble de $\mathbf{R}^5$ défini par

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 + x_2 = x_3 - x_4 = x_5 = x_2 + x_4\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^5$.
   L'ensemble F est l'intersection des noyau des trois formes linéaires suivantes :

   $$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto x_1 + x_2 - x_3 + x_4$$

   $$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto x_3 - x_4 - x_5$$

   $$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto x_5 - x_2 - x_4$$

   C'est donc un sous-espace vectoriel car intersection de trois sous-espaces vectoriels (hyperplans vectoriels).
2. Calculer sa dimension en voyant F comme une intersection de noyaux de formes linéaires indépendantes.
   Les trois formes linéaires évoquées dans ma réponse à la question précédente sont linéairement indépendantes (à justifier) donc F est de dimension $5-1-1-1=2$.
3. Donner une base de F.
   Résolvons le système

   $$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_3 - x_4 - x_5 = 0,\ x_5 - x_2 - x_4 = 0$$

   par l'algorithme de Gauss-Jordan :

   $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

   $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

   $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Le système a une infinité de solutions avec deux degrés de liberté (x_4 et x_5 peuvent être fixés arbitrairement) : pour $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ on obtient le vecteur $(1, -1, 1, 1, 0)$, pour $x_4 = 0$, $x_5 = 1$ on obtient le vecteur $(0, 1, 1, 0, 1)$. Les deux vecteurs $(1, -1, 1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1, 0, 1)$ forment une base de F.

Exercice 3. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A suivante, en développant suivant la **première** colonne :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Écrivez tous les calculs, dites quelles règles vous appliquez et donnez le résultat sous forme développée.

Exercice 4.

1. Calculer les valeurs propres de la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On calcule $\det(B - XId)$:

$$\det(B - XId) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 1 & 3-X & 3 \\ 1 & 1 & 3-X \end{vmatrix} = (-X) \begin{vmatrix} 3-X & 3 \\ 1 & 3-X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3-X \end{vmatrix}$$

On obtient

$$\det(B - XId) = (-X)((3-X)^2 - 3) - (3 - X - 3) = (-X)(9 - 6X + X^2 - 3 - 1)$$

soit

$$\det(B - XId) = (-X)(X^2 - 6X + 5).$$

On cherche les racines de $X^2 - 6X + 5$: on trouve 1 et 5. Les valeurs propres de B sont donc 0, 1, 5.

2. Diagonaliser la matrice B et calculer B^n.
Pour diagonaliser B on cherche des vecteurs propres associés aux valeurs propres. **Pour 0**, on obtient le sytème associé à la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

On applique l'algorithme de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit que $(-3, 0, 1)$ est un vecteur propre de B associé à la valeur propre 0.
Pour 1, on obtient le sytème associé à la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

On applique l'algorithme de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit que $(1, 1, -1)$ est un vecteur propre de B associé à la valeur propre 1.
Pour 5, on obtient le sytème associé à la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

On applique l'algorithme de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -10 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit que $(1, 5, 3)$ est un vecteur propre de B associé à la valeur propre 5. Posons

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie qu'on a

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

D'autre part

$$B^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Exercice 5. On considère la matrice suivante

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que C est la matrice d'une projection. Quelles sont les valeurs propres de C ?
Il suffit de vérifier que $C^2 = C$. Les valeurs propres d'une projection sont 0 et 1.