

## Feuille 1

**Exercice 1.** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ -2 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,

et  $Z = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ . Calculer tous les produits matriciels qui ont un sens.

**Exercice 2.** Soient  $A$  et  $B$  les matrices de l'exercice 1. Soient

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\lambda,12} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Effectuez les produits  $E_{23}.A$ ,  $E_{23}.B$ ,  $B.E_{23}$ ,  $F_{12}.A$ ,  $F_{12}.B$ ,  $B.F_{12}$ ,  $M_{\lambda,12}.A$ ,  $M_{\lambda,12}.B$ ,  $B.M_{\lambda,12}$ . Observez, commentez.

**Exercice 3.** Une usine fabrique deux produits, A et B. Chaque produit contient quatre matières différentes W, X, Y, Z. La fabrication de chaque unité de chaque matière nécessite trois forme d'énergie, électricité, gaz, pétrole. Les deux tableaux suivants présentent les nombres d'unités nécessaires d'énergie pour produire une unité de chaque matière, les quantités de matières nécessaires pour produire une unité de chaque produit A et B. Utiliser la multiplication matricielle pour exprimer les quantités d'énergie nécessaires à la production d'une unité de chaque produit.

	W	X	Y	Z
A	2	3	1	1
B	4	2	0	1

	Electricité	Pétrole	Gaz
W	5	3	6
X	1	0	1
Y	0	4	0
Z	3	0	4

**Exercice 4.** Même chose avec trois produits finaux A, B, C et trois matières intermédiaires X, Y, Z. Les données étant présentées dans les tableaux suivants.

	A	B	C
X	2	3	1
Y	0	2	0
Z	1	2	1

	Electricité	Pétrole	Gaz
X	5	2	1
Y	0	2	1
Z	0	2	2

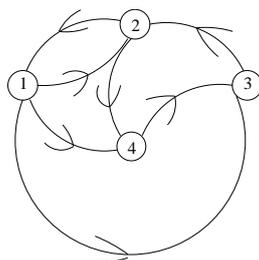
**Exercice 5.** Un magasin vend deux types d'articles. Lorsque leurs prix unitaires sont  $P_1$  et  $P_2$ , les quantités demandées pour chaque produit,  $D_1$  et  $D_2$ , et les quantités disponibles de chaque produit (l'offre),  $S_1$  et  $S_2$ , sont reliées par les équations

$$D_1 = 70 - 2P_1 + P_2, \quad D_2 = 105 + P_1 - P_2$$

$$S_1 = -14 + 3P_1, \quad S_2 = -7 + 2P_2.$$

1. Les deux articles sont-ils en compétition (comme deux modèles de petites voitures électriques) ou sont-ils complémentaires (tels une chemise et une cravate) ?
2. Trouvez les prix d'équilibre de chaque produit, c'est-à-dire ceux pour lesquels l'offre et la demande sont égales.

**Exercice 6.** Donner le nombre de chemins de longueur 2 allant de 1 à 3 dans le graphe suivant. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 allant de 1 à 3 ? Combien y-a-t-il de chemins de longueur 8 allant de 1 à 3 ? Combien y-a-t-il de chemins de longueur 5 en tout ? Combien y-a-t-il de chemins de longueur 42 en tout ? Se rendre compte que le calcul matriciel est très utile (la calculatrice aussi) pour répondre à ce genre de question quand les nombres considérés sont grands.



**Exercice 7.** Un modèle d'économie simple et irréaliste.

- a. Il y a  $n$  producteurs  $P_1, \dots, P_n$ .
- b. Il y a  $n$  biens  $B_1, \dots, B_n$ .
- c. Le bien  $B_i$  est produit par le producteur  $P_i$ .
- d. On considère une période fixe (disons un an).
- e. Chaque producteur produit une unité de son produit (choix d'unité arbitraire).
- f. Pour produire le bien  $B_i$  le producteur  $P_i$  a besoin des autres biens. Nous désignons par  $a_{i,j}$  la quantité de bien  $B_j$  nécessaire à la production d'une unité du produit  $B_i$ .
- g. Nous supposons que l'économie est fermée (pas d'échange avec l'extérieur).
- h. Nous supposons que tous les biens produits sont utilisés.

Le producteur  $P_i$  vend son produit au prix  $\pi_i$ .

1. Écrire mathématiquement que chaque producteur ne dépense pas plus qu'il ne reçoit.
2. Montrer que pour qu'aucun producteur ne fasse de déficit il faut que le bénéfice de tous soit nul. Commencer par le cas de deux producteurs.
3. Dans le cas de deux producteurs qui échangent réellement, montrer qu'il est possible de déterminer des prix assurant l'absence de déficit.

**Exercice 8.** Soit  $A$  une matrice carrée  $n \times n$  ( $n \geq 2$ ) dont les coefficients sont tous strictement positifs et telle que les sommes des éléments des colonnes soient égales à 1. Notons  $d$  le plus petit coefficient de  $A$ .

1. Montrer que  $d$  est inférieur ou égal à  $1/2$ .
2. Pour tout  $Y$  vecteur  $1 \times n$  dont les coefficients sont positifs ou nuls, notons  $m(Y)$  le plus petit coefficient de  $Y$ ,  $M(Y)$  le plus grand. Montrer que, pour tout  $Y$  vecteur ligne positif ou nul, on a

$$M(YA) - m(YA) \leq (1 - 2d)(M(Y) - m(Y)).$$

- En déduire que  $YA^k$  converge vers un vecteur ligne dont toutes les coordonnées sont égales entre elles (lorsque  $k$  tend vers l'infini).
- En déduire que  $A^k$  converge vers une matrice dont toutes les colonnes sont égales, puis que l'équation  $AX = X$  a une solution  $X$  positive.

**Exercice 9.** Résoudre les systèmes linéaires suivants par l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}, \begin{cases} 3x + 4y - z = 8 \\ 6x + 8y - 2z = 3 \end{cases}, \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 5 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases},$$

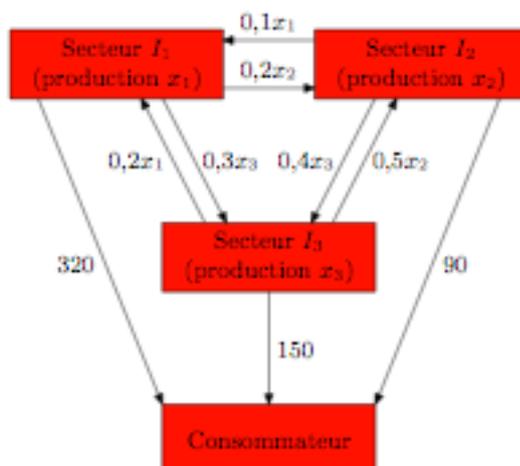
$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}, \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ 11x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 11 \end{cases}, \begin{cases} 3x + 11y + 19z = 22 \\ 7x + 23y + 39z = 10 \\ -4x - 3y - 2z = 6 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3x + 6y + 14z = 22 \\ 7x + 14y + 30z = 46 \\ 4x + 8y + 7z = 6 \end{cases}, \begin{cases} 3x + 5y + 3z = 25 \\ 7x + 9y + 19z = 65 \\ -4x + 5y + 11z = 5 \end{cases}.$$

**Exercice 10.** « Un coq vaut cinq pièces, une poule trois pièces et trois poussins une pièce. Avec 100 pièces, on veut acheter 100 volatiles. Combien de coqs, poules et poussins pouvons nous acheter ? » (*Chine, 5eme siècle*)

**Exercice 11.** « Un seigneur avait cent personnes à son service et ordonna qu'on leur distribue cent mesures de grain. Il précisa que chaque homme devait recevoir trois mesures, chaque femme deux mesures et chaque enfant une demi-mesure. Combien d'hommes, de femmes, d'enfants avait-il à son service ? » On précise qu'il avait au moins un homme, une femme, un enfant. (*Alcuin, précepteur de Charlemagne, VIIIeme siècle*)

**Exercice 12.** 1. Considérons une économie avec trois secteurs industriels,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ . Quelles quantités  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  doivent-elles produire pour satisfaire à la fois la demande des consommateurs et celle des autres secteurs ? La demande requise de chaque secteur est représentée sur la figure ci-dessous.



- Lorsqu'on considère un modèle entrée-sortie avec plus de trois secteurs industriels, il devient malaisé de représenter les demandes par un diagramme comme celui de la question précédente. Supposons qu'il y ait des secteurs  $I_1, \dots, I_n$ , de productions  $x_1, \dots, x_n$ . Les

vecteurs de production  $x$ , de demande des consommateurs  $b$  et de demande pour le secteur  $I_j$  sont

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}, \quad v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

où  $b_i$  est la demande des consommateurs sur le secteur  $I_i$  et  $a_{ij}$  est la demande du secteur  $I_j$  au secteur  $I_i$ , par euro de production du secteur  $I_j$ .

- Trouver les quatre vecteurs de demandes pour l'économie de la question 1).
  - Quelle est la signification économique de  $x_j v_j$  ?
  - Quelle est la signification économique de  $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n + b$  ?
  - Quelle est la signification économique de l'équation  $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n + b = x$  ?
3. Considérons l'économie d'Israël en 1958. Les trois secteurs industriels considérés sont :  $I_1$  agriculture,  $I_2$  biens manufacturés,  $I_3$  énergie. Production et demande sont mesurés en millions de livres israéliennes, la monnaie d'Israël à cette époque. On nous dit que

$$b = \begin{pmatrix} 13,2 \\ 17,6 \\ 1,8 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0,293 \\ 0,014 \\ 0,044 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,207 \\ 0,001 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,017 \\ 0,216 \end{pmatrix}$$

- Pourquoi la première composante des vecteurs  $v_2$  et  $v_3$  est-elle nulle ?
- Trouver les productions  $x_1, x_2, x_3$  qui satisfont la demande.

**Exercice 13.** Une économie est structurée en trois secteurs 1, 2, 3. Chaque secteur utilise des consommations intermédiaires de production des autres pour travailler. Pour produire une unité, le secteur 1 utilise 0 unité de production du secteur 2, 0,1 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 2 utilise 0,2 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 3 utilise 0,1 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 2.

- Donner la matrice de technologie associée à cette économie.
- Si la demande pour les produits du secteur 1 est 1, celle pour le secteur 2 est 2 et celle pour le secteur 3 est 1, quelles doivent-être les productions brutes de chacun des secteurs ? (On pourra prendre  $1/0,99 = 1,01$  et arrondir à deux chiffres après la virgule)

**Exercice 14.** Écrire sous forme matricielle les formes quadratiques suivantes :

$$Q(x, y, z, t) = x^2 - 2y^2 + 3xy + 2z^2 - 3xz + 4zt - 8xt + t^2,$$

$$Q(a, b, c) = 2ab - 6bc + 8ac.$$