DS 3 (16 décembre)
Durée : une heure trente
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1. Soient $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (-1, 2, 2)$, $u_3 = (1, -1, -1)$ et $u_4 = (3, -2, 1)$. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ? Si oui, démontrez-le, sinon, écrivez une relation de liaison.

Les vecteurs appartiennent à $\mathbf{R}^3$ qui est de dimension 3. Le nombre maximal de vecteurs d'une famille libre dans $\mathbf{R}^3$ est 3. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) a quatre vecteurs ; elle est donc liée. On cherche des nombres a_1, a_2, a_3, a_4 non tous nuls tels que

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4 = 0.$$

Cela revient à résoudre le système linéaire homogène associé à la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -17 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 17/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 17/2 & 0 \end{array}\right)$$

Conclusion : par exemple

$$3u_1 - 8u_2 - 17u_3 + 2u_4 = 0.$$

Exercice 2. On considère F le sous-ensemble de $\mathbf{R}^5$ défini par

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 + x_2 = x_3 - x_4 = x_5\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^5$.
   Le vecteur nul appartient à F (car $0+0=0-0=0$) et si (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) et (y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) appartiennent à F leur somme aussi et, pour tout réel λ, λ fois (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) aussi (l'écrire).
2. Calculer sa dimension en voyant (par exemple) F comme une intersection de noyaux de formes linéaires indépendantes.
   Réécrivons la définition de F de manière différente
   $$\begin{aligned} F &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbf{R}^5 \mid x_1+x_2=x_3-x_4=x_5\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbf{R}^5 \mid x_1+x_2=x_3-x_4 \text{ et } x_3-x_4=x_5\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbf{R}^5 \mid x_1+x_2-x_3+x_4=0 \text{ et } x_3-x_4-x_5=0\} \end{aligned}$$
   le sev F est donc l'intersection des noyau des deux formes linéaires indépendantes :
   $$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\mapsto x_1+x_2-x_3+x_4,$$
   et
   $$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\mapsto x_3-x_4-x_5.$$
   La dimension de F est donc $5-2=3$.
2. Donner une base de F.
   On cherche l'ensemble des (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) tels que
   $$x_1+x_2-x_3+x_4=0 \text{ et } x_3-x_4-x_5=0.$$
   Résolvons le système dont la matrice augmentée est
   $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$
   Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan.
   $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
   Conclusion : on peut fixer arbitrairement x_2, x_4, x_5 et x_1 et x_3 s'en déduisent. En prenant $x_2=1, x_4=x_5=0$ on obtient le vecteur $(-1,1,0,0,0)$, en prenant $x_4=1, x_2=x_5=0$ on obtient le vecteur $(0,0,1,1,0)$, en prenant $x_5=1, x_2=x_4=0$ on obtient le vecteur $(1,0,1,0,1)$.
   Les trois vecteurs $(-1,1,0,0,0)$, $(0,0,1,1,0)$, $(1,0,1,0,1)$ forment un base de F.

Exercice 3. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A suivante, en développant suivant la **première** colonne :
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Écrivez tous les calculs, dites quelles règles vous appliquez et donnez le résultat sous forme développée.

$$
\begin{aligned}
det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (+\mathbf{2})\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-\mathbf{1})\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad +(+\mathbf{0})\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-(-\mathbf{1}))\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2(0 - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0) - (\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0) \\
&\quad +(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}) \\
&= -2(1-2) - (1 - (-1+1)) + (-2 + (-2+1)) \\
&= -2
\end{aligned}
$$

Exercice 4. 1. Calculer les valeurs propres des matrices suivantes :

$$
B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.
$$

2. Diagonaliser la matrice C et calculer C^n.

$$
\begin{aligned}
det(B - \lambda Id) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)(3-\lambda) - 1 \\
&= \lambda^2 - 5\lambda + 5
\end{aligned}
$$

On en déduit les valeurs propres de B : $\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

$$
\begin{aligned}
det(C - \lambda Id) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4) \\
&= (2-\lambda)^2(\lambda + 2)
\end{aligned}
$$

La matrice a donc deux valeurs propres : 2 (de multiplicité 2) et -2. Pour diagonaliser C il faut trouver une base de vecteurs propres de C. On résout $CV = 2V$. Cela revient à résoudre le système linéaire homogène associé à la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ -3 & 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 8 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont tous multiples du vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On résout $CV = -2V$. Cela revient à résoudre le système linéaire homogène associé à la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 4 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 4 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 4 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont tous multiples du vecteur

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On n'a pas de base de vecteurs propres (il faudrait trois vecteurs formant une famille libre) : la matrice C n'est pas diagonalisable [1].

1. Il va sans dire qu'une étudiante ayant fait les calculs précédents se voyait attribuer tous les points.

Exercice 5. Soit M une matrice carrée admettant 1, 2, 3 comme valeurs propres. Considérons trois vecteurs propres de M, v_1, v_2, v_3, associés respectivement aux valeurs propres 1, 2, 3.

1. Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre.
   Supposons qu'on ait $a_1v_1+a_2v_2 = 0$. On veut montrer que a_1 et a_2 sont tous les deux nuls. En prenant l'image par M on obtient $a_1Mv_1+a_2Mv_2 = 0$, soit $a_1v_1+2a_2v_2 = 0$. En soustrayant la première égalité à celle que nous venons d'obtenir on obtient $a_2v_2 = 0$ donc $a_2 = 0$ (car $v_2 \neq 0$ par définition d'un vecteur propre). On a donc aussi $a_1v_1 = 0$ et $a_1 = 0$.

2. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre. *Indication : écrire qu'une combinaison linéaire des trois vecteurs est nulle, prendre l'image par M, utiliser les deux combinaisons obtenues pour en déduire une combinaison linéaire nulle de v_1 et v_2 ; conclure grâce à la question précédente.*
   Supposons qu'on ait $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3 = 0$. On veut montrer que a_1, a_2 et a_3 sont tous les trois nuls. En prenant l'image par M on obtient $a_1Mv_1 + a_2Mv_2 + a_3Mv_3 = 0$, soit $a_1v_1 + 2a_2v_2 + 3a_3v_3 = 0$. En la première égalité multipliée par trois à celle que nous venons d'obtenir on obtient $-2a_1v_1 - a_2v_2 = 0$. D'après la première question cela entraîne $-2a_1 = -a_2 = 0$ c'est-à-dire $a_1 = a_2 = 0$. On a donc $a_3v_3 = 0$ et $a_3 = 0$ aussi.