DS 2 (18 novembre)
Durée 45 minutes

Exercice 1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^8$ de dimensions 5 ($\dim(F) = \dim(G) = 5$).

1. Donner une formule liant les dimensions de $F + G$, F, G, $F \cap G$.

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

2. Quelle sont les dimensions possibles de l'intersection de F et de G ?
De la question précédente on déduit

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = 5 + 5 - \dim(F + G) = 10 - \dim(F + G).$$

Comme $F + G \subset \mathbb{R}^8$, $\dim(F + G) \leq 8$ et $\dim(F \cap G) \geq 10 - 8 = 2$. Par ailleurs, $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$ entraîne $\dim(F \cap G) \leq 5$. Les valeurs possibles de $\dim(F \cap G)$ sont 2, 3, 4, 5.

Exercice 2. Soient $v_1 = (1, 1, -2, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 2, -1, 1)$, $v_4 = (1, -2, 1, -1)$ quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^4$.

1. Donner une équation de $F = Vect(v_1, v_2, v_3, v_4)$ (autrement dit à quelle(s) condition(s) sur ses coordonnées un vecteur (x, y, z, t) appartient-il à $Vect(v_1, v_2, v_3, v_4)$?)
Cherchons à quelles conditions un vecteur (x, y, z, t) appartient à $Vect(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Il faut que (x, y, z, t) s'écrive comme une combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 autrement dit qu'il existe des nombres réels a_1, a_2, a_3, a_4 tels que $(x, y, z, t) = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4$. Cette égalité est un système linéaire auquel on peut associer la matrice augmentée suivante

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 2 & -2 & y \\ -2 & 1 & -1 & 1 & z \\ 1 & 0 & 1 & -1 & t \end{array}\right)$$

Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & -3 & y-x \\ 0 & -1 & 1 & 3 & z+2x \\ 0 & 1 & 0 & -2 & t-x \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & -2 & t-x \\ 0 & 2 & 1 & -3 & y-x \\ 0 & -1 & 1 & 3 & z+2x \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & -2 & t-x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y-2t+x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z+x+t \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & -2 & t-x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y-2t+x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z-y+3t \end{array}\right)$$

Le système n'a des solutions que si $z - y + 3t = 0$. C'est l'équation recherchée.

2. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?
Non. La résolution du système précédent (avec $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$) permet de voir que, pour tout a_4, on a

$$2a_4v_1 + 2a_4v_2 - a_4v_3 + a_4v_4 = 0.$$

Pour $a_4 = 1$, par exemple, on obtient

$$2v_1 + 2v_2 - v_3 + v_4 = 0,$$

combinaison linéaire nulle dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

3. Quelle est la dimension de F ?
D'après la question 1., F est le noyau de la forme linéaire $(x, y, z, t) \mapsto z - y + 3t$. Cette forme linéaire n'est pas la forme linéaire nulle. On en déduit que F est un hyperplan : sa dimension est $4 - 1 = 3$.
4. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$? De F ?
La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^4$ puisque $\dim Vect(v_1, v_2, v_3, v_4) = 3$ est strictement à 4, la dimension de $\mathbb{R}^4$. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est génératrice de F par définition.
5. Cette famille forme-t-elle une base de F ?
Non, puisqu'elle n'est pas libre.