Feuille 4

Exercice 1. Calculer les déterminants des matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 10 & 14 & 22 \\ 0 & 21 & 33 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} x & y & x & y \\ 0 & x & y & x \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$

Exercice 3. Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 + A + I = 0$. Calculer $\det A$. Même question avec $A^2 - A + I = 0$.

Exercice 4. Montrer que si n est impair, il n'existe pas de $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 + I = 0$. Même question avec $A^2 - \sqrt{2}A + I = 0$.

Exercice 5. Montrer que si n est impair et $A \in M_n(\mathbf{R})$ antisymétrique, alors $\det A = 0$.

Exercice 6. Inverser les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Calculer pour tout $n \geq 2$

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ x & \ddots & & \vdots & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & a_1 \end{vmatrix} \quad \text{puis} \quad \Gamma_n := \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & a_1 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_1 & x \end{vmatrix}.$$

Exercice 8. Calculer

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 9. Montrer que si $P \in \mathbf{R}[X]$ est tel que $\deg P < n$, et

$$A = \begin{bmatrix} P(x) & P(x+1) & \cdots & P(x+n) \\ P(x+1) & P(x+2) & \cdots & P(x+n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(x+n) & p(x+n+1) & \cdots & P(x+2n) \end{bmatrix},$$

alors $\det A = 0$. Calculer $\det B$ avec

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & \cdots & n^2 \\ 1 & 4 & 9 & \cdots & (n+1)^2 \\ 4 & 9 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \cdots & \cdots & (2n)^2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 10. Calculer les valeurs propres des matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $a \neq b$ fixés. Montrer que

$$\Delta(X) := \begin{vmatrix} \lambda_1 + X & b + X & \cdots & b + X \\ a + X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b + X \\ a + X & \cdots & a + X & \lambda_n + X \end{vmatrix}$$

est un polynôme de degré au plus 1, calculer $\Delta(-a)$ et $\Delta(-b)$ et en déduire $\Delta = \Delta(0)$.

Exercice 12. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, et V le vecteur $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Calculer le produit AV. Déteminer les valeurs propres de V ainsi que des vecteurs propres associés. Pourquoi peut-on choisir des vecteurs propres formant une base orthonormée ? Quelle propriété intéressante a alors la matrice de passage ? En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 13. Lorsque c'est possible, diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 14. Pour quelles valeurs de a, b et c les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

Exercice 15. La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?

Exercice 16. Soient a un réel et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice A par rapport à la base canonique est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A. Pour quelles valeurs du paramètre a le noyau de f n'est-il pas réduit à $\{0\}$? Justifier.
2. Montrer que le polynôme caractéristique P de f vérifie $P = (X-3)Q$, où Q est un polynôme que l'on déterminera. Pour quelles valeurs de a le nombre 3 est-il racine multiple de P ?
3. Déterminer, en fonction de a, les valeurs propres de f, leurs multiplicités et la dimension des sous espaces propres associés. Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice 17. Diagonaliser la matrice A suivante et calculer A^n :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 18. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux. Soit u l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{array}$$

Montrer que u est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de u et, si c'est possible, diagonaliser u.