Feuille 3

Exercice 1. Soient $u_1 = (3, 1, -1)$, $u_2 = (-1, 1, 2)$, $u_3 = (1, -1, 1)$ et $u_4 = (5, -2, 3)$. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ? Si oui, démontrez le, sinon, écrivez une relation de liaison.

Exercice 2. Les familles suivantes sont-elles libres ? Et/ou génératrices ?

1. $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 2, 2)$, $u_3 = (3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$
2. $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$
3. $w_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $w_2 = (2, 1, 2, 1, 2)$, $w_3 = (1, 0, 1, 1, 0)$, $w_4 = (0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 0, -3, -1)$, $v_3 = (-2, -4, 2, 1)$ et $v_4 = (3, 6, 0, 2)$.

1. Les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 appartiennent-ils au sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y = 2x\}$
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?
3. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?
4. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
5. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^4$, soient $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, -1)$, et $v_4 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

1. Vérifier qu'ils appartiennent au sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z+t = 0\}$.
2. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?
3. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$? De F ?
4. Cette famille forme-t-elle une base de F ?

Exercice 5. Dans $\mathbb{C}^3$, on considère la famille des trois vecteurs $u_1 = (1, -1, i)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ et $u_3 = (i, 1, -1)$. Cette famille est-elle libre ? Génératrice ? Si oui, écrire les coordonnées de $v = (1 + i, 1 - i, i)$ dans la base u_1, u_2, u_3.

Exercice 6. Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + z = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. En donner des familles génératrices.
3. Est-ce encore vrai pour l'ensemble $\mathcal{T}$ des solutions de l'équation $x - y + z = 1$?

Exercice 7. Soient $u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (2, -1, 1)$, $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (2, -1, 1)$. Montrer que le sous-espace engendré par u_1 et u_2 coincide avec le sous-espace vectoriel engendré par v_1 et v_2, de deux manières.

1. En écrivant u_1 et u_2 chacun comme combinaison linéaire de v_1 et v_2.
2. En trouvant des équations pour chacun de ces deux sous-espaces.
3. Soient P_1 le plan paramétré par $P_1 = \{(\lambda, \mu, \lambda + \mu), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ et $P_2 = \{(\lambda + 2\mu, 2\lambda - \mu, 3\lambda + \mu), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Comparez ces deux plans.

Exercice 8. Montrer que les vecteurs $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (-1, 1, 0)$, et $f_3 = (1, 0, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire chacun des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, et $e_3 = (0, 0, 1)$ comme combinaison linéaire de f_1, f_2, f_3.

Exercice 9. Dans l'espace $\mathbf{C}^3$, vérifier que les vecteurs

$$u_1 = (1, -1, i), \quad u_2 = (1, -1, 1) \quad \text{et} \quad u_3 = (i, 1, -1)$$

forment une base et calculer les coordonnées de $v = (1 + i, 1 - i, i)$ dans la base (u_1, u_2, u_3).

Exercice 10. 1. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par

$$v_1 = (1, -1, 3, 2), \quad v_2 = (3, -1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, -6, -3) \quad \text{et} \quad v_4 = (0, 2, -9, -5).$$

   (a) Déterminer la dimension de F et en donner une base.
   (b) Donner un système d'équations cartésiennes de F.

2. Soit
$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}.$$
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et donner une base de G.

3. Montrer que $F \subset G$. A-t-on $F = G$?

Exercice 11. Déterminer une base sur $\mathbf{R}$ pour les sous-espaces vectoriels suivants, et la compléter en une base de tout l'espace.

1. $\mathrm{Vect}((1, 2, 1), (0, 1, 3), (2, 2, -4)) \subset \mathbf{R}^3$
2. $\mathrm{Vect}((1, 3, 0), (2, 3, -3)) \cap \mathrm{Vect}((1, 1, -3), (1, 4, 3)) \subset \mathbf{R}^3$
3. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbf{R}^3$

Exercice 12. Déterminer une base sur $\mathbf{C}$ pour les sous-espaces vectoriels suivants, et la compléter en une base de tout l'espace.

1. $\mathrm{Vect}((2 + i, 1 + i, i), (1 + 3i, 2i, -1 + 2i)) \subset \mathbf{C}^3$
2. $\mathrm{Vect}((1, 0, i), (0, 1 + i, 1 - i)) \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{C}^3 \mid (4 + i)x_1 - x_2 = 0\} \subset \mathbf{C}^3$

Exercice 13. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, donner une base de F et sa dimension dans les cas suivants :

1. $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$
2. $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_1 + x_n = x_2 + x_n = \ldots + x_n = x_{n-1} + x_n = 0\}$

Exercice 14. Montrer que les polynômes

$$P_1(X) = X(X - 1)(X - 2), \quad P_2(X) = X(X - 1)(X - 3),$$

$$P_3(X) = X(X - 2)(X - 3) \quad \text{et} \quad P_4(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$$

forment une base de $\mathbf{R}[X]_{\leq 3}$. Exprimer dans cette base le polynôme P tel que $P(0) = 3$, $P(1) = -2$, $P(2) = 5$, $P(3) = 7$.

Exercice 15. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \alpha & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & \beta & \beta \\ 3 & 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 3 & 0 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

où α et β sont des paramètres.

Exercice 16. Soit $A = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ où a et b désignent deux réels.

1. Montrer qu'on a $2 \leq \text{rg } A \leq 3$.
2. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\text{rg } A = 2$?

Exercice 17. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Soient $v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (-1, 1, 2)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$.
3. En déduire que f est une symétrie par rapport à un plan vectoriel que l'on déterminera.

Exercice 18. Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (X, Y, Z)$ avec $X = x - y + z + t, Y = x + 2z - t, Z = x + y + 3z - 3t$.

1. Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques ?
2. Montrer que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\text{im} f$ et la compléter en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$.
3. Montrer que $\ker f$ est de dimension 2 et donner une base (u_1, u_2) de $\ker f$.
4. Vérifier que (e_1, e_2, u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^4$. Quelle est la matrice de f dans les bases (e_1, e_2, u_1, u_2) et $\mathcal{B}$?

Exercice 19. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soient $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$ et $\varepsilon_2 = (1, 2, 1)$.

1. Vérifier que les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et e_1 forment une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Soit f l'application linéaire définie de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ par $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \quad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \quad$ et $\quad f(e_1) = e_1 + e_2$. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
3. Calculer la matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_1)$.

Exercice 20. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z, x + z)$.

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
2. Montrer que les vecteurs $v_1 = (2, 1, -1)$, $v_2 = (2, -1, 2)$ et $v_3 = (3, 0, 1)$ forment une base de $\mathbf{R}^3$. Donner la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 21. Considérons l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$; notons $(e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique et v le vecteur défini par $v = e_1 + \ldots + e_n$. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'application linéaire définie, pour $i = 1, \ldots, n$, par $f(e_i) = e_i + v$.

1. Montrer que tout vecteur de $\ker f$ est colinéaire à v et, en fait, égal à 0.
2. Montrer que f est un isomorphisme.

3. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Exercice 22. Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + 4z)$.

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
2. Considérons les vecteurs $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 1, 2)$ et $v_3 = (2, 1, 5)$ de $\mathbf{R}^3$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 23. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. Notons $f : E \to E$ l'application linéaire dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.

1. Trouver une base de $\ker f$.
2. Posons $v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v_2 = e_2 + e_3$ et $v_3 = e_1 + 2e_3$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E. Calculer la matrice de f dans cette base.
3. En déduire que l'on a $f \circ f = -f$.

Exercice 24. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'unique application linéaire qui vérifie $f(e_1) = -e_1+e_2+e_3$, $f(e_2) = -2e_1+2e_3$ et $f(e_3) = -4e_1+e_2+4e_3$.

1. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Donner une base de $\mathrm{im} f$ et une équation de $\mathrm{im} f$.
3. Pour quelles valeurs du paramètre réel t l'application linéaire $f - t\mathrm{Id}$ est-elle un isomorphisme ?
4. Trouver une base v_1 de $\ker(f - 3\mathrm{Id})$ et une base v_2 de $\ker f$. Montrer que les vecteurs v_1 et v_2 sont linéairement indépendants. Trouver v_3 dans $\mathbf{R}^3$ tel que (v_1, v_2, v_3) soit une base de $\mathbf{R}^3$. Quelle est la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) ?

Exercice 25. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Notons f l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Écrire la matrice de f dans la base (e_3, e_2, e_1).
2. Écrire la matrice de f dans la base $(e_1 + e_3, e_3, e_2 - e_3)$.

Exercice 26. Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), on considère l'endomorphisme u défini par $u(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3$, $u(e_2) = e_1 - e_2$ et $u(e_3) = e_2 - e_3$.

1. Écrire la matrice M de u dans la base canonique. Calculer M^2 et vérifier que $M^3 = 0$.
2. Déterminer $\ker u$, $\ker u^2$, $\mathrm{im} u$, $\mathrm{im} u^2$ et donner les relations d'inclusion entre ces sous-espaces.
3. On pose $e_1' = u^2(e_1), e_2' = -u(e_3), e_3' = e_3$. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbf{R}^3$. Donner la matrice N de u dans cette base.
4. Soit S la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e_1', e_2', e_3'). Calculer S^2 et en déduire S^{-1}. Vérifier que $S^{-1}MS = N$.

Exercice 27. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}_{\leq 3}[X]$ défini par $\varphi(P)(X) = P(X + 1)$.

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.

2. Montrer que A est inversible.

Exercice 28. Soit φ l'application de $\mathbf{R}_{\leq 3}[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$ définie par $\varphi(P)(X) = P(X) - XP'(X)$.

1. Montrer que φ définit un endomorphisme de $\mathbf{R}_{\leq 3}[X]$.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.
4. Quel est le rang de M ?