# Couples de variables aléatoires

**exercice 1 :**
On considère deux variables aléatoires indépendantes $X$ et $Y$, suivant des lois de Bernoulli de paramètre respectif $p_1$ et $p_2$. Déterminer la loi de $X+Y$ et de $XY$.

**exercice 2 :**
On considère une variable aléatoire $X$ dont la loi est donnée par :

$$P(X=-1) = P(X=0) = P(X=1) = 1/3.$$

On pose $Y = X^2$. Donnez la loi de $Y$, montrez que $cov(XY) = 0$ mais que $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.

**exercice 3 :**
On lance deux dés équilibrés ; soit $Y$ le plus grand des deux chiffres obtenus et soit $X$ leur somme.
a) Déterminer la loi du couple $(X, Y)$ et les lois marginales. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
b) Calculer $E(X)$ .
c) Déterminer la loi conditionnelle de $Y$ sachant que $X = 6$.

**exercice 4 :**
On lance un dé équilibré , soit $X$ le chiffre obtenu et $Y$ la variable aléatoire définie par $Y = 1$ si le chiffre est pair et $Y = 0$ s'il est impair. Calculer la variance de $Z = X + Y$.

**exercice 5 :**
La loi de probabilité conjointe du couple de variables aléatoires $(X, Y)$ est donnée par le tableau :

| $X \setminus Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2/48 | 6/48 | 3/48 | 1/48 | |
| 2 | 4/48 | 12/48 | 6/48 | 2/48 | |
| 4 | 2/48 | 6/48 | 3/48 | 1/48 | |

Déterminer les lois marginales de $X$ et $Y$, ainsi que leurs espérances. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**exercice 6 :**
Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, P)$ et suivant une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. On appelle $U = max(X, Y)$ et $V = min(X, Y)$. Donner le tableau de la loi conjointe du couple $(U, V)$. Donner les lois marginales.
Calculer la covariance $cov(U, V)$ du couple $(U, V)$. Les variables aléatoires $U$ et $V$ sont-elles indépendantes ?

**exercice 7 :**
Un dé équilibré est lancé $n$ fois. Soit $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de chiffres pairs obtenus et $Z$ la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus.
– Pour n=2, explicitez la loi conjointe de $Y$ et $Z$. Calculez $cov(Y, Z)$.
– Dans le cas général, calculez $V(Y)$, $V(Z)$, $V(Y+Z)$ et en déduire $cov(Y, Z)$.

# Inégalité de Bienaymé-Tchebichev
# Loi des grands nombres

**exercice 1 :**
On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.
– Peut-on estimer la probabilité que la production de la semaine prochaine dépasse 75 pièces ?
– On sait de plus que la variance de la production hebdomadaire est de 25. Peut-on estimer la probabilité que la production de la semaine prochaine soit comprise entre 40 et 60 pièces ?

**exercice 2 :**
On considère une variable aléatoire $X$ obéissant à la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, ...9\}$. Calculez son espérance et sa variance.
Majorez la quantité $P(|X-5| > 4)$ grace à l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev. Que vaut en fait cette probabilité ? Commentez.

**exercice 3 :**
Dans une population de $N = 30.000.000$ individus, la proportion d'individus présentant le caractère $c$ est $p = 0,4$. On prélève un échantillon de taille $n = 1600$ et on note $S_n(\omega)$ le nombre d'individus de l'échantillon présentant le caractère $c$. Minorer la probabilité des événements :

$$0,30 \leq \frac{S_n(\omega)}{n} \leq 0,50 \qquad 0,35 \leq \frac{S_n(\omega)}{n} \leq 0,45 \qquad 0,38 \leq \frac{S_n(\omega)}{n} \leq 0,42$$

Calculer la longueur $l$ de la fourchette telle que :

$$P\Big(0,40 - \frac{l}{2} \leq \frac{S_n(\omega)}{n} \leq 0,40 + \frac{l}{2}\Big) > 0,95$$

**exercice 4 :**
Soit $X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant une espérance $\mu$ et une variance $\sigma^2$, on pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ :

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\ \mu}{\sqrt{n}\ \sigma}$$

Soit $k \in \{1, 2, 3\}$. Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev afin de majorer la probabilité $P(|Y_n| \geq k)$.

**exercice 5 :**
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, estimez le nombre de lancers nécessaires pour que la fréquence de Pile observé au jeu de Pile ou Face soit comprise entre 0,4 et 0,6 avec une probabilité au moins égale à 0,9.

**exercice 6 :**
On lance cent fois une piece de monnaie. Majorez, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, la probabilité d'avoir plus de 70 fois Face ou moins de 30 fois Face à l'issue de ces tirages. Calculez explicitement cette probabilité. Commentez.