Indépendance

exercice 1 :
On jette deux fois une pièce bien équilibrée et on considère les événements :

- A : “Le premier jet donne Face”
- B : “Le deuxième jet donne Face”
- C : “Les deux jets donnent le même résultat”

A et B sont-ils indépendants ? A et C sont-ils indépendants ? B et C sont-ils indépendants ? A, B et C sont-ils indépendants ?

exercice 2 :
Soit A et B des événements tels que $P(A) = 1/4$, $P(A \cup B) = 1/3$. Calculer $P(B)$ dans les cas suivants :
– A et B sont disjoints – A et B sont indépendants – A implique B $(A \subset B)$.

exercice 3 :
Un archer s'exerce sur une cible ; on suppose que la probablité qu'il touche la cible est égale à p, $p \in [0, 1]$. Cet archer effectue n tirs , $n \in \mathbf{N}$, qu'on suppose indépendants entre eux. Soit k un entier inférieur ou égal à n. Considérons les événements :

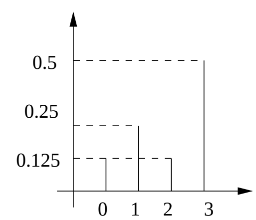
$$\begin{array}{rcl} A & : & \text{le premier tir atteint la cible.} \\ B_k & : & \text{exactement } k \text{ tirs atteignent la cible.} \end{array}$$

A quelle condition sur k ces deux événements sont-ils indépendants ?

exercice 4 :
A quelle condition deux événements disjoints sont-ils indépendants ? Montrez qu'une variable aléatoire est indépendante d'elle-même si et seulement si elle est constante.

exercice 5 :
Soit m et n deux entiers positifs. On lance n dés à m faces. Notons S la somme des résultats obtenus. Calculez l'espérance et la variance de S.

exercice 6 :
Voici le graphe des fréquences d'une variable aléatoire ; calculez son espérance, sa variance et son écart-type. On effectue deux épreuves de manière indépendante et on somme les résultats obtenus. Dessinez le graphe des fréquences de la somme. Espérance et écart type de la somme ?



exercice 7 :
Stéphane et Jean-Baptiste choisissent chacun au hasard un nombre de 1 à 10, sans se consulter. On fera une représentation graphique en portant les choix possibles pour Stéphane en abscisse et les choix possibles pour Jean-Baptiste en ordonnée. Quelle est la probabilité qu'ils aient choisi le même nombre ?

Au jeu de pierre, ciseau, papier, quelle est la probabilité d'un match nul si les deux participants font leur choix de manière indépendante et uniforme ? Combien de manches faut-il en moyenne avant que l'un des deux participants soit victorieux ?

exercice 8 :
On estime que la probabilité que la vie apparaisse sur une planète quelconque de notre univers est très faible ; disons de l'ordre de une chance sur un milliard de milliard de milliard. Il y a cependant beaucoup de planètes dans l'univers ; disons un milliard de milliard de milliard. Evaluez la probabilité qu'il y ait effectivement une vie extraterrestre dans notre univers. Quelle hypothèse implicite avez-vous faite ? On rappelle que $\lim_{n\to\infty} (1 - 1/n)^n = 1/e$.

Probabilités conditionnelles

exercice 1 :
Soit i un entier compris entre 2 et 12. On jette successivement deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité que le résultat du premier dé soit égal à 6, sachant que la somme des deux résultats est égale à i ?

exercice 2 :
Une urne contient trois boules rouges et deux boules blanches. On fait trois tirages successifs sans remettre les boules tirées dans l'urne. Sachant que les boules rouges sont indiscernables entre elles et qu'il en va de même pour les boules blanches, quels sont les résultats possibles ? Quelle probabilité affecter à chacun de ces résultats ? Vérifier que la somme de ces probabilités donne bien 1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux boules rouges ? d'obtenir une boule rouge au second tirage ?

exercice 3 :
On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant respectivement 4 boules rouges et 5 boules noires, 5 boules rouges et 4 boules noires. On choisit une urne au hasard, et on tire successivement deux boules sans remise. On obtient deux boules rouges. Quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne U_1 ?

Même question si les tirages des deux boules ont lieu avec remise.

exercice 4 :
Un tricheur a dans sa poche deux pièces de monnaie ; l'une est normale, l'autre est deséquilibrée, de telle sorte que *Face* sort deux fois plus souvent que *Pile*. Il prend une de ces pièces au hasard et obtient 4 fois *Face* en 6 lancers. Quelle est la probabilité pour qu'il ait pris la pièce deséquilibrée ?

exercice 5 :
Dans une ville, un tiers des habitants appartiennent au parti de “droite” D : parmi eux 80% sont favorables au curé, 20% au maire, 90% sont pour la prohibition de l'alcool, 10% contre cette prohibition, et leurs opinions à l'égard d'une part, de ces personnalités, d'autre part, de l'alcool sont indépendantes. Dans le parti de “gauche” G, au contraire, qui regroupe les deux tiers des habitants, 70% sont favorables au maire, 30% au curé, 20% sont pour la prohibition de l'alcool, 80% contre ; et chez eux également il y a indépendance entre ces opinions.
Un individu se déclare favorable au maire et ennemi de l'alcool. Avec quelle probabilité appartient-il au parti D ?

exercice 6 :
Soit n un entier positif. On considère n individus $I_1, I_2 ... I_n$; ces individus mentent avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, leurs comportements sont indépendants. Une information (sous forme de oui ou non) est donnée à I_1 qui la transmet à I_2 ... qui la transmet à I_n, qui l'annonce au monde. Quelle est la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise ? Montrez que $\lim_{n\to\infty} p_n = 1/2$.

exercice 7 :
Soit P une probabilité sur un univers Ω. Soit E_i, $i = 1..n$, des événements formant une partition de Ω : les E_i sont deux à deux disjoints et l'union de tous les E_i est égal à Ω. Soit enfin A et B deux événements ; montrez la formule :

$$P(A|B) = \sum_{i=1}^{n} P(A|E_i \cap B)\ P(E_i|B)$$