Préparation du devoir du 22 novembre

Les questions données ci-dessous sont données à titre d'exemples. Les exercices du devoir du 22 novembre en seront proches mais ne seront pas exactement ceux là. Vous n'aurez qu'une heure pour faire le devoir. Il comportera moins d'exercices que cette page.

Vrai-Faux
Une partie du devoir prendra la forme d'un Vrai-Faux. Aucune justification de réponse n'est demandée dans un tel exercice.
– L'ensemble $\{(x, y) \ / \ x^2 - y^2 \leq 1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Vrai/Faux.
– L'ensemble $\{(x, y) \ / \ x^2 - y^2 \leq 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. Vrai/Faux.
– Si $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$ sont continues en 0 alors $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est continue en $(0, 0)$. Vrai/Faux.
– Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles ayant des dérivées partielles secondes alors sa matrice hessienne est une matrice $n \times n$ symétrique. Vrai/Faux.

Exercice Montrer que l'ensemble

$$E = \{(x, y, z) \ / \ 3x^4 + 2y^8 + z^2 = 1\}$$

est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \ / \ x^3 + 2y^2 + z^2 = 1\}$$

est-il un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^3$?

Exercice La fonction $f(x, y, z) = 2xyz$ est-elle continue ? La restriction de cette fonction à l'ensemble $\{(x, y, z) \ / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ est-elle bornée et atteint-elle ses bornes ? Pourquoi ?

Exercice Écrire le développement limité de $t \mapsto \frac{1}{2-t}$ à l'ordre 3 en 0, celui de $t \mapsto \frac{1}{3+t}$ à l'ordre 2 en 1.

Exercice Écrire les développements limités de $t \mapsto \tan(t)$ et de $t \mapsto \ln(t)$ à l'ordre 3 en 0. En déduire le développement de $t \mapsto \tan(t) + \ln(t)$ à l'ordre 3 en 0 et la limite de

$$\frac{\tan(t) + \ln(1 + t) - 2t + \frac{t^2}{2}}{t^3}$$

lorsque t tend vers 0.

Exercice Écrire la matrice jacobienne (lorsqu'elle est définie) de l'application définie par :

$$f(x, y, z) = (2xyz, \sqrt{x + y^2}, (2 + 3x + 2y + z)^2).$$

Exercice Considérons les fonctions suivantes :

$$x(u, v) = u^2 - v^2, \ y(u, v) = \ln(u + v), \ z(u, v) = v^2 + u,$$

$$f(x, y, z) = x^2 - xy - 3z^2.$$

Posons $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Calculer les dérivées partielles de F par rapport à u et v.

Exercice Un exercice qui ressemble aux exercices 1, 2, 3 de la feuille 4.