NOM : LE BORGNE **PRÉNOM : Stéphane**

DS 1 (7 octobre)

(Durée 54 minutes, calculatrices et documents interdits)

Questions de cours (4 points)

1) Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Quand dit-on qu'un point x de A est à l'intérieur de A ?

On dit qu'un point x de A est à l'intérieur de A si

$$\exists r > 0 \text{ tel que } B(x,r) \subset A.$$

2) Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^n$. Quand dit-on que f est bornée sur $\mathbb{R}^n$?

On dit que f est bornée sur $\mathbb{R}^n$ si

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}^n \ |f(x)| \leq M.$$

3) Rappeler la définition du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Leur produit scalaire est défini par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

4) Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On a

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Vrai-Faux (entre -3 et 3 points)

Aucune justification de réponse n'est demandée. Un demi point par bonne réponse, zéro par absence de réponse, moins un demi par réponse incorrecte. **Entourer la bonne réponse.**

- L'ensemble $\{(x, y) \ / \ 0 \leq x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. **Vrai** .
- L'ensemble $\{(x, y) \ / \ x^2 + 2xy + y^2 \leq 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. **Faux**.
- Une fonction positive sur un ensemble fermé non vide a une borne inférieure. **Vrai**.
- Si une partie de $\mathbb{R}^n$ est compacte, alors sa partie complémentaire n'est pas bornée. **Vrai**.
- La réunion de deux parties compactes de $\mathbb{R}^2$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. **Vrai**.
- Une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^n$ peut avoir un minimum local en un point de $\mathbb{R}^n$ mais ne pas être minorée sur $\mathbb{R}^n$. **Vrai**.

Exemples, contre-exemples (2 points)

Donner un exemple

– de partie de $\mathbb{R}^2$ non bornée, d'intérieur vide ;

$\mathbb{Z}^2$ ou $\{(x, y) \ / \ x = 0\}$ ou $\{(x, y) \ / \ x = y\}$ ou $\{(x, y) \ / \ y = x^2\}$ ou...

– d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ bornée n'atteignant pas sa borne supérieure.

La fonction f définie par $f(x, y) = 1 - \frac{1}{1+x^2+y^2}$, ou bien (exemple très proche d'un exemple du cours) $f(x, y) = 1 - \exp\left(-(x^2 + y^2)\right)$ ou...

Exercice 1 (3 points)

Donner les coordonnées polaires de

$(-1, -2)$: $(\sqrt{5}, \pi + \arccos(1/\sqrt{5}))$ ou bien $(\sqrt{5}, 2\pi - \arccos(-1/\sqrt{5}))$,

$(1,-1)$: $(\sqrt{2}, 2\pi - \pi/4) = (\sqrt{2}, 7\pi/4)$.
Donner les coordonnées sphériques de
$(0,2,-2)$: $(2\sqrt{2}, \pi/2, 3\pi/4)$,
$(-1,-1,-1)$: $(\sqrt{3}, 5\pi/4, \arccos(-1/\sqrt{3}))$.

Exercice 2 (4 points)
On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x\,,\,y) = x^2 + y^2 - 2x + 3.$$

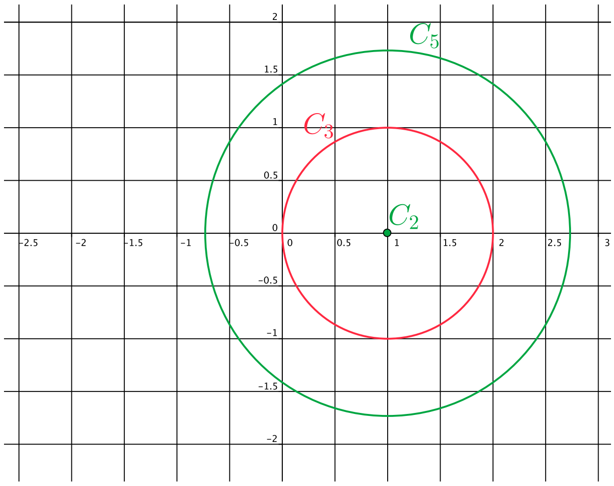
Représenter les courbes de niveaux 0, 2, 3, 5 de f.
La courbe C_α de niveau α de f est donné par l'équation

$$x^2 + y^2 - 2x + 3 = \alpha,$$

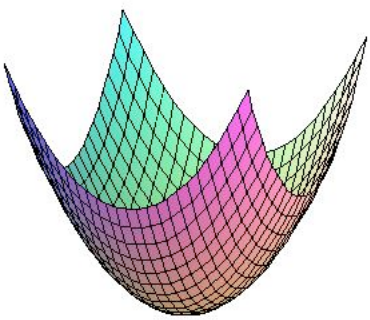
c'est-à-dire

$$(x-1)^2 + y^2 = \alpha - 2.$$

La courbe C_0 est donc vide ; la courbe C_2 est le point $(1,0)$, la courbe C_3 le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1, la courbe C_5 le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.



Dessiner l'allure du graphe de f.



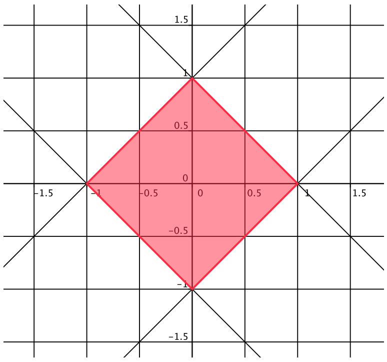
La fonction est-elle majorée ? Non. Minorée ? Oui, par 2 (pour $\alpha < 2$, la courbe de niveau α est vide).

NOM : LE BORGNE **PRÉNOM : Stéphane**

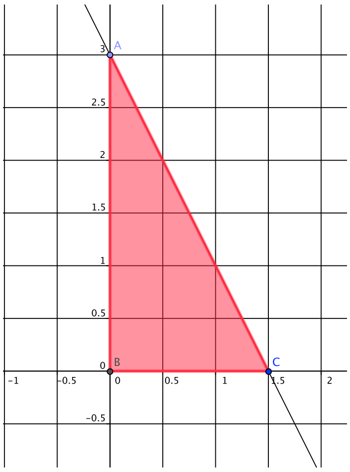
Dessins (6 points (2+1+3))

Dessiner les sous ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(x,y) \mid \max(|x-y|,|x+y|) \leq 1\}$



(b) $\{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x+y \leq 3\}$



(c) $\{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ y^2 \leq (x+y)^2 \leq 1\}$